

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física atómica, Molecular y Nuclear



**OPTIMIZACIÓN Y CONTROL DE JUEGOS DE AZAR Y
MOTORES BROWNIANOS COLECTIVOS**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Luis Ignacio Dinis Vizcaíno

Bajo la dirección del doctor
Juan Manuel Rodríguez Parrondo

Madrid, 2006

Optimización y control de juegos de azar y motores brownianos colectivos

Luis Ignacio Dinis Vizcaíno

29 de septiembre de 2005

Director: Juan Manuel Rodríguez Parrondo

Tesis Doctoral

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear
Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos

Universidad Complutense de Madrid

a mis padres

Agradecimientos

Quiero empezar dando las gracias a mi director, Juan Manuel Rodríguez Parrondo, por tener siempre tiempo para mí, por enseñarme, guiarme, considerar mis opiniones, por sus consejos y su manera de trabajar durante estos años, y en definitiva, por hacer posible esta tesis. Quisiera dar también las gracias a Ricardo Brito, mi tutor, por prestarme su ayuda y apoyo siempre que lo he necesitado, y por estimular con sus clases de licenciatura mi interés por la Física Estadística. Entre ambos han establecido un magnífico grupo de investigación en el que he tenido la suerte de trabajar.

Aprovecho para agradecer a Fran Cao su colaboración, con quien hemos desarrollado la investigación sobre control y motores brownianos. Ha sido un placer trabajar con Fran. También le agradezco sus consejos sobre los papeleos, que han resultado una ayuda inestimable.

Estoy en deuda con Christian van den Broeck y Bart Cleuren por compartir conmigo sus ideas y conocimientos sobre los juegos.

También debo mucho, tanto en lo personal como en lo científico, a los integrantes del Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos, en especial a la sección de la Charlie 3, con quienes ha sido un auténtico privilegio compartir cursos, seminarios y congresos.

En mis estancias fuera me han acogido Jacques Prost, Leonardo Martínez, Javi Buceta y Katja Lindenberg, que han tenido una enorme paciencia conmigo.

Durante estos años, he disfrutado de la compañía de mis colegas de despacho. Muchas gracias Borja, Leonardo y Rodrigo por vuestra ayuda y por aguantar mis historias.

¿Cómo expresar con palabras todo lo que debo a mis padres? No se puede. Además, ellos ya lo saben, pero de todas maneras, gracias por estar ahí y apoyarme durante todos estos años. Gracias también a Juan Antonio, Pablo, Bego y Marta, y a mis tías Bene y Mari, que están tan ilusionados como yo con esta tesis.

Elsa, que tenía más convicción que yo en que podría acabar la tesis en el plazo previsto, merece una mención especial. No lo habría conseguido sin sus palabras de ánimo. Además, me ha tenido que aguantar durante los meses de escritura. ¡Menudo aburrimiento de verano!

L. D.

Madrid, 29 de septiembre de 2005

Esta tesis se ha desarrollado con el apoyo y financiación de los proyectos BFM2001-0291 de la Dirección General de Enseñanza Superior y FIS2004-00271 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

La Universidad Complutense ha contribuido a través de una beca predoctoral y dos ayudas para estancias breves, dentro de su programa de Formación de Personal Investigador.

Agradezco además a Leonardo y a Katja la colaboración económica, que supuso una ayuda esencial.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Del movimiento browniano a las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck	3
1.1.1	El movimiento browniano	3
1.1.2	El proceso de Wiener	6
1.1.3	La ecuación de Langevin	9
1.1.4	Integrales estocásticas y la fórmula de Ito	13
1.1.5	Ecuación de Fokker-Planck	13
1.1.6	Algoritmo de Euler	15
1.1.7	Ruido blanco gaussiano	16
1.2	Flashing ratchet o motor de encendido y apagado	16
1.2.1	El efecto “ratchet”	16
1.2.2	“Flashing ratchet”: definición	18
1.2.3	Comportamiento	20
1.3	La paradoja de Parrondo	25
1.3.1	Los juegos originales	26
1.3.2	Análisis. Reorganización de tendencias	29
1.4	Estructura y objetivos de la tesis	34
1.4.1	Estrategias en los juegos	35
1.4.2	Control en motores brownianos colectivos	37
2	Toma de decisiones colectiva: estrategias avariciosas frente a estrategias ciegas	39
2.1	La optimización a corto plazo o cómo la estrategia avariciosa resulta peor que las estrategias ciegas.	39
2.1.1	Análisis para $N \rightarrow \infty$	40
2.2	Un ejemplo determinista	45
2.2.1	Solución mediante el principio de Bellman	47
2.3	Los juegos democráticos	53
2.3.1	El modelo.	53
2.3.2	Análisis.	54
2.3.3	Explicación del fenómeno.	56
2.3.4	Juegos dependientes de la historia	58

2.4	Número finito de jugadores	58
2.4.1	Resultados de simulación	59
2.4.2	Análisis de los efectos del número finito de jugadores . . .	60
2.5	Otras formas de decisión colectiva	64
2.5.1	Dictador y oligarquía	64
2.5.2	Análisis del modelo del dictador	68
2.5.3	Dictadura y oligarquía adaptativas	70
3	Optimización en los juegos paradójicos (I): La secuencia óptima	73
3.1	El problema.	74
3.2	La solución formal	74
3.3	Resolución numérica (I): 10 o menos turnos	78
3.4	Resolución numérica (II): cualquier número de turnos	78
3.5	Resultados	80
3.6	La secuencia óptima para un solo jugador	86
4	Optimización en los juegos paradójicos (II): La estrategia óptima para N jugadores	89
4.1	La solución formal	90
4.2	Probabilidades de transición entre estados	92
4.3	El algoritmo	95
4.4	Resultados	96
5	Control en la “flashing ratchet”	103
5.1	Criterio sobre la fuerza	104
5.1.1	Motivación: el control de una partícula.	104
5.1.2	Potencial efectivo	106
5.1.3	La ecuación de Fokker-Planck	108
5.1.4	Cálculo de la velocidad promedio	109
5.1.5	Este protocolo de control, ¿es un demonio de Maxwell? . .	113
5.1.6	Generalización a N partículas	118
5.1.7	Análisis I. Ecuación de Fokker-Planck	120
5.1.8	Simulaciones	122
5.1.9	Análisis II. Aproximaciones N pequeño	125
5.1.10	Análisis III. Aproximación N grande	132
5.2	Criterio basado en umbrales	143
5.2.1	El potencial de perfil suave y los protocolos de control ya estudiados	143
5.2.2	El protocolo de control basado en umbrales para la fuerza $f(t)$	146
5.2.3	Resultados	153
5.2.4	Detalles de las simulaciones	154
5.2.5	De cómo el nuevo control funciona mejor siendo menos “avaricioso”.	155

6 Conclusiones	159
6.1 Estrategias y optimización en los juegos paradójicos colectivos . .	159
6.2 Control en motores brownianos colectivos	162
6.3 Cuestiones abiertas y líneas futuras de investigación	163
Apéndices	165
A Propiedades del proceso de Wiener	165
B Integrales estocásticas	169
C Ecuación de Fokker-Planck	177
D Ruido blanco gaussiano	179
E Cadenas de Markov	183
F Cálculo de x_k^c	187
G Obtención del periodo óptimo	189
Publicaciones derivadas de la tesis	193
Referencias	195

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar aspectos fundamentales relacionados con la rectificación y el control de fluctuaciones.

Desde la observación del *movimiento browniano*, pero sobre todo desde la explicación de Einstein del fenómeno basada en la teoría cinética de los gases, la línea de investigación dedicada a entender el papel que desempeñan las fluctuaciones en determinados procesos físicos ha recibido una considerable atención. Dentro de esta línea, en los últimos años ha resultado especialmente activa la rama referente a la rectificación de fluctuaciones térmicas por parte de los llamados motores brownianos o ratchets, compuestos por partículas brownianas.

Una partícula browniana es una partícula en contacto con un baño térmico que por su pequeño tamaño y masa realiza un movimiento irregular como consecuencia de la agitación térmica. Los motores brownianos son sistemas capaces de rectificar, al menos en parte, el movimiento irregular de estas partículas gracias a algún tipo de asimetría espacial o temporal, transportándolas en una cierta dirección.

El término motor browniano abarca en realidad gran cantidad de realizaciones experimentales y modelos teóricos diferentes. Nosotros centraremos la atención en un determinado tipo de motor, conocido como *flashing ratchet*¹. Este motor consiste en una o varias partículas brownianas sometidas a un potencial asimétrico de dientes de sierra unidimensional, del tipo representado en la figura 1.1, que puede ser encendido o apagado por un agente controlador. Si el encendido o apagado se realiza de forma periódica o aleatoria, las partículas son transportadas en el sentido indicado por la más débil de las dos fuerzas provenientes del potencial, en el caso del potencial de la figura 1.1, hacia la

¹No existe por el momento traducción al castellano de este término extendida en la comunidad que estudia dichos modelos, por lo que cualquier traducción del tipo “trinquete pulsado” o similar resultaría probablemente carente de significado incluso para el especialista en motores brownianos. En consecuencia, se ha preferido mantener el término anglosajón. Por otra parte, es habitual emplear “ratchet” en género femenino, quizá por su posible traducción como “rueda dentada”.

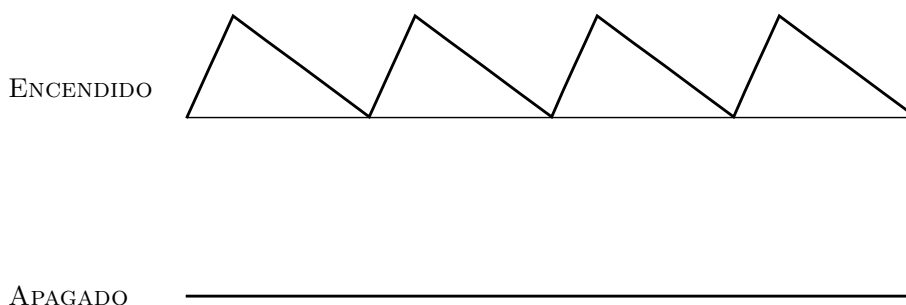


Figura 1.1: Estado encendido y apagado del potencial de la flashing ratchet.

derecha. Este fenómeno, conocido como *efecto ratchet* resulta, a primera vista, sorprendente puesto que, tanto si el potencial se enciende o se apaga permanentemente, las partículas alcanzan un estado de equilibrio y no existe transporte.

El efecto ratchet muestra que en general el resultado de alternar dos dinámicas aleatorias no tiene por qué ser una especie de suma o combinación de los efectos de cada dinámica por separado sino que puede ser de hecho completamente inesperado, como ocurre también en determinados juegos de azar. Por ejemplo, dos juegos justos, en los que el jugador ni gana ni pierde en promedio, o incluso dos juegos perdedores, pueden dar lugar, al combinarlos de manera periódica o aleatoria, a un juego ganador, lo que se conoce como *paradoja de Parrondo*.

Este capítulo introductorio se dedica a la descripción detallada de la flashing ratchet y los juegos de azar paradójicos, que son los sistemas en los que estudiaremos diversos aspectos de control y optimización lo largo de la tesis. Repasaremos también algunas de las herramientas teóricas habitualmente utilizadas para el análisis de estos sistemas.

En concreto, la sección 1.1 se dedica a la interpretación de Einstein del movimiento browniano, la descripción de dicho movimiento mediante el proceso de Wiener y las ecuaciones de Langevin, así como el algoritmo de Euler que se puede utilizar para resolverla de forma numérica. También repasamos brevemente una descripción alternativa o complementaria a la de Langevin, la ecuación de Fokker-Planck. La sección 1.2 se ocupa del análisis de la flashing ratchet mientras que los juegos paradójicos se presentan en la sección 1.3 y se analizan utilizando técnicas de la teoría de las *cadenas de Markov*. La introducción concluye exponiendo los objetivos, estructura y motivaciones de la tesis en la sección 1.4.

1.1 Del movimiento browniano a las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck

1.1.1 El movimiento browniano

En 1827 el botánico escocés Robert Brown describió en su artículo (Brown, 1828) un curioso fenómeno. Examinando partículas de unas micras de diámetro provenientes de granos de polen triturados y disueltos en agua, observó a través del microscopio que las partículas realizaban un movimiento irregular, a pesar del estado de reposo de la muestra y el microscopio. Inicialmente, Brown atribuyó este movimiento al origen biológico de las partículas, pero posteriormente descartó esta idea al comprobar que diferentes tipos de partículas inorgánicas se comportaban de manera similar, siempre y cuando fueran lo suficientemente pequeñas. A partir de entonces, este movimiento se conoce como movimiento browniano.

A finales del siglo XIX ya se había propuesto que el movimiento browniano es un reflejo de la naturaleza molecular de la materia. A pesar de que el fluido que contiene las partículas brownianas se encuentra en equilibrio, a temperatura ambiente las moléculas del mismo se mueven con velocidades muy altas. En su movimiento una cierta cantidad de moléculas chocará con la partícula, provenientes de cualquier dirección. Dado que el fluido está en reposo y no tiene ningún movimiento sistemático o flujo, el momento total transferido por las moléculas ha de ser nulo en promedio. Si la masa de la partícula es suficientemente pequeña, cualquier pequeña diferencia entre el momento transferido en un sentido y el contrario hará que la partícula comience a moverse en una cierta dirección con velocidad apreciable en el microscopio. Una nueva fluctuación del momento transferido puede hacer que la partícula cambie repentinamente su rumbo, dando lugar al movimiento errático observado.

El primero en dar una explicación cuantitativa del fenómeno fue Einstein (Einstein, 1906). Resumiré a continuación la explicación de Einstein aunque utilizando una terminología algo más moderna.

El argumento de Einstein consistía en suponer que un cierto número de partículas brownianas sufre un proceso de difusión, al igual que lo hacen las moléculas de agua. También supuso que sobre las partículas brownianas se ejerce una fuerza F que, por simplicidad, tomó en la dirección x de un recipiente de sección unidad, sin especificar en un primer momento el origen de la fuerza. El arrastre de las partículas en el estado de equilibrio debido a la fuerza se ve compensado por el efecto de la difusión, estableciéndose un cierto perfil de densidad de partículas brownianas, $\rho(x)$. Utilizando la definición habitual de potencial químico (Baierlein, 2001):

$$\mu(x) = V(x) + kT \ln \rho(x) \quad (1.1)$$

con $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, k la constante de Boltzmann, y T la temperatura de la muestra de agua, podemos encontrar el perfil de equilibrio.²

²Cuando se ponen en contacto dos sistemas con diferente concentración de partículas,

El potencial químico es el parámetro que determina el equilibrio de los flujos de materia. La materia tiende a fluir hacia zonas de menos potencial químico y el equilibrio se alcanza cuando éste es uniforme (Baierlein, 2001), es decir:

$$\mu(x) = (cte.) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

de donde

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + kT \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Utilizando $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, escribimos la condición de equilibrio:

$$-F\rho + kT \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

ecuación que ha de satisfacer $\rho(x)$.

Einstein interpretó esta ecuación como el balance entre dos procesos: un proceso difusivo y otro de arrastre debido a la fuerza F . En primer lugar, el proceso de difusión es el resultado del movimiento irregular de las partículas brownianas producido por el movimiento térmico de las moléculas.

En 1905 los procesos de difusión ya eran bien conocidos y se aceptaba su descripción a través de la ley de Fick, según la cual la ecuación de evolución para la densidad de partículas es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

donde D recibe el nombre de coeficiente de difusión. La ley de Fick se puede escribir como una ley de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

donde J es la corriente de partículas, es decir, el número de partículas que atraviesan la unidad de área por unidad de tiempo.

En el proceso de difusión, la corriente viene dada por

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1.7)$$

de manera que si la difusión es el único proceso, las partículas se mueven hacia lugares de menor concentración de partículas.

Por otro lado, las partículas al ser arrastradas por la fuerza F sufrirán una fuerza de origen viscoso. La fuerza de viscosidad es proporcional a la velocidad

$$F_{\text{roz}} = -\gamma v \quad (1.8)$$

el estado de equilibrio se alcanza cuando se igualan las energías libres de ambos sistemas. Podemos pensar en nuestro sistema como una colección de subsistemas de tamaño diferencial Δx . La condición de equilibrio será entonces que no haya diferencia en el potencial químico (energía libre) de un sistema a otro, es decir, que no haya gradiente de potencial químico, o equivalentemente que $\mu(x) = \text{cte.}$

con γ el coeficiente de fricción. Suponiendo que las partículas son esféricas de radio R , la ley de Stokes para el coeficiente de fricción es

$$\gamma = 6\pi\nu R \quad (1.9)$$

donde ν es la viscosidad del fluido. Cuando se alcanza la velocidad límite, la fuerza de arrastre se ve compensada por la fuerza de viscosidad, por lo que la velocidad que alcanzan las partículas debido a la fuerza F es

$$v = -\frac{F}{\gamma} = \frac{-F}{6\pi\nu R} \quad (1.10)$$

y el flujo de partículas será

$$\rho v = -\frac{\rho F}{6\pi\nu R}. \quad (1.11)$$

Según Einstein, en el equilibrio este flujo compensa exactamente el flujo provocado por la difusión (para una mejor comprensión del argumento de Einstein, se puede consultar (Parrondo, 2005)), de forma que

$$-\frac{\rho F}{6\pi\nu R} = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Rightarrow \frac{\rho F}{6\pi\nu R} - D \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

Comparando la ecuación (1.12) con (1.4) obtenemos el valor del coeficiente de difusión de las partículas³:

$$D = \frac{kT}{\gamma} = kT \frac{1}{6\pi\nu R} \quad (1.13)$$

En realidad, la idea que subyace en el artículo de Einstein es una interpretación de las partículas brownianas como una colectividad estadística. En esta imagen, la densidad de probabilidad de una sola partícula localizada en r_0 originalmente evoluciona exactamente igual que la densidad de materia de un grupo numeroso de partículas localizadas inicialmente en r_0 . Así, la densidad de probabilidad de la partícula $\rho(\vec{r}, t)$ sigue la Ley de Fick para la difusión

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = D \nabla^2 \rho(\vec{r}, t), \quad (1.14)$$

escrita ahora en tres dimensiones. La condición inicial para la ecuación en derivadas parciales es la correspondiente a una partícula localizada en $\vec{r} = \vec{r}_0$ en $t = 0$:

$$\rho(\vec{r}, 0) = \delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|), \quad (1.15)$$

³El argumento de Einstein se puede entender también desde el punto de vista energético. La partícula browniana está en contacto con un baño térmico con el que intercambia energía a través de las fluctuaciones de su momento y de la disipación. Las fluctuaciones tienden, en promedio, a incrementar la energía de la partícula, mientras que la disipación constituye un flujo de energía siempre desde la partícula al baño térmico. En el equilibrio, ambos flujos se compensan, de modo que la energía de la partícula permanece constante. A este equilibrio se le conoce como relación fluctuación-disipación, y permite deducir de forma directa la ecuación (1.13), por lo que resulta habitual denominar dicha ecuación también como relación fluctuación-disipación.

donde el símbolo δ representa la delta de Dirac. Esta interpretación permite una comparación cuantitativa con el experimento de movimiento browniano. La solución a dicha ecuación es una distribución gaussiana

$$\rho(\vec{r}, t) = (4\pi Dt)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4Dt}}. \quad (1.16)$$

Una vez obtenida la distribución, podemos calcular el desplazamiento cuadrático medio como

$$\langle |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 \rangle = 3(4\pi Dt)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 6Dt, \quad (1.17)$$

ya que la integral se puede calcular analíticamente. Midiendo el desplazamiento cuadrático medio de las partículas brownianas en función del tiempo podemos obtener una medida de D que podemos comparar con la ecuación (1.13). De hecho, en realidad Einstein expresó el coeficiente de difusión en función del número de Avogadro N_A utilizando la constante de los gases ideales $R = kN_A$:

$$D = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi\nu R} \quad (1.18)$$

y propuso el experimento de movimiento browniano como una manera de medir el número de Avogadro. Este resultado es por tanto coherente con la imagen de que el movimiento browniano es consecuencia directa de la naturaleza molecular de la materia. A la vista de la ecuación (1.18), podemos decir que el hecho de que el número de Avogadro sea un número finito, tiene como consecuencia que el coeficiente de difusión D de las partículas brownianas sea distinto de cero. Un coeficiente de difusión distinto de cero implica necesariamente según la ecuación (1.17) un movimiento de la partícula.

1.1.2 El proceso de Wiener

Como hemos visto, la explicación de Einstein del movimiento browniano se centra en el análisis de la evolución de la densidad de probabilidad del proceso. N. Wiener estudió el movimiento browniano prestando atención directamente a las posibles trayectorias de las partículas (Wiener, 1921). Para Wiener, el movimiento detallado de una partícula es un miembro del conjunto de todas las trayectorias $\vec{r}(t)$ posibles y se da con una cierta probabilidad. Cada trayectoria es una realización de una variable aleatoria, que además evoluciona en el tiempo, lo que se denomina habitualmente como *proceso estocástico*. Aunque la trayectoria $\vec{r}(t)$ es en general un vector de tres componentes, debido a la isotropía del movimiento browniano se puede descomponer en tres movimientos independientes y estudiar sólo uno de ellos. Así, podemos considerar sólo la coordenada $x(t)$, y tomar $x(t) = W(t)$, donde $W(t)$ es un proceso estocástico conocido como *proceso de Wiener*⁴.

⁴Siguiendo la notación habitual, las variables que representan procesos estocásticos las denotaremos con letras mayúsculas.

Para que $W(t)$ pueda representar la trayectoria unidimensional de una partícula browniana, ha de tener ciertas propiedades estadísticas de manera que, al considerar todas las trayectorias posibles junto con su probabilidad, obtengamos un comportamiento gaussiano para la densidad de probabilidad de la partícula.

La propiedad más relevante del proceso de Wiener es la independencia estadística de sus incrementos, esto es, si $t_1 < t_2 < t_3$, $W(t_3) - W(t_2)$ y $W(t_2) - W(t_1)$ son variables aleatorias estadísticamente independientes. El hecho de que esto se cumpla no importa cuán cercanos sean t_1 , t_2 y t_3 , hace que el proceso de Wiener sea singular desde el punto de vista matemático. Por ello, una manera conveniente de definirlo es como el límite continuo del siguiente proceso estocástico discreto en el tiempo y que toma valores discretos, basado en un proceso de Bernoulli $\eta(t)$:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta(t), \text{ con } X(0) = 0, \quad (1.19)$$

donde σ es una constante positiva y $\eta(t)$ es el proceso definido por

$$\eta(t) = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.20)$$

Con esta definición, $\eta(t)$ es independiente estadísticamente de $\eta(t')$ para todo $t' \neq t$, y en consecuencia, los incrementos de $X(t)$

$$\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t) = \sigma\sqrt{\Delta t}\eta(t) \quad (1.21)$$

son variables aleatorias independientes. Podemos escribir $X(t)$ como la suma de estos incrementos

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta X(i\Delta t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma\sqrt{\Delta t}\eta(i\Delta t), \text{ con } t = n\Delta t, \quad (1.22)$$

y calcular el valor medio y varianza. El valor medio de cualquiera de los sumandos ΔX es cero y por tanto también lo es el valor medio de $X(t)$. Para la varianza de ΔX tenemos

$$\langle \Delta X^2 \rangle = \Delta t \sigma^2 \langle \eta(t)^2 \rangle = \sigma^2 \Delta t \left(1^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} \right) = \sigma^2 \Delta t \quad (1.23)$$

y como todos los incrementos ΔX son independientes, con la misma distribución, y hay $n = \frac{t}{\Delta t}$ sumandos, la varianza de $X(t)$ es

$$\langle X(t)^2 \rangle = \frac{t}{\Delta t} \langle \Delta X^2 \rangle = \frac{t}{\Delta t} \Delta t \sigma^2 = \sigma^2 t. \quad (1.24)$$

La expresión (1.24) es válida para cualquier número de sumandos n . $X(t)$ es una variable aleatoria suma de variables independientes idénticamente distribuidas y por tanto, según el Teorema Central del Límite, su distribución es

gaussiana en el límite de $n \rightarrow \infty$ correspondiente a tomar $\Delta t \rightarrow 0$. Así, si definimos el proceso de Wiener como

$$W(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t) \quad (1.25)$$

será un proceso estocástico con valor inicial

$$W(0) = 0 \quad (1.26)$$

y cuya distribución de probabilidad es gaussiana⁵ con media

$$\langle W(t) \rangle = 0 \quad (1.27)$$

y varianza

$$\langle W(t)^2 \rangle = \sigma^2 t. \quad (1.28)$$

Su densidad de probabilidad es entonces

$$\rho_W(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{w^2}{\sigma^2 t}} \quad (1.29)$$

que es el equivalente unidimensional de la distribución (1.16) que habíamos encontrado para la densidad de probabilidad de una partícula browniana basándonos en la ecuación de difusión. Basta tomar tres procesos de Wiener independientes $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$, uno para cada coordenada de la partícula

$$x(t) = W_1(t) + x_0 \quad (1.30)$$

$$y(t) = W_2(t) + y_0 \quad (1.31)$$

$$z(t) = W_3(t) + z_0 \quad (1.32)$$

para obtener las trayectorias tridimensionales de una partícula browniana cuya posición inicial era $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. La densidad de probabilidad para la posición $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ será el producto de las densidades para W_1, W_2 y W_3 ya que son independientes, obteniéndose

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2 t}\right)^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\sigma^2 t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{\sigma^2 t}} \quad (1.33)$$

Por último, la comparación con la distribución (1.16) nos indica que para que los procesos de Wiener representen las trayectorias de la partícula debemos

⁵Tal y como lo hemos definido, el proceso de Wiener es el límite continuo de un caminante aleatorio (“random walker”), que es precisamente el modelo que utilizó Einstein (1906) para calcular la distribución de probabilidad es gaussiana en el límite de tiempos largos (que equivale a $\Delta t \rightarrow 0$). Alternativamente, se puede definir el proceso de Wiener de forma independiente como un proceso estocástico gaussiano de media nula y varianza proporcional a t y se demuestra entonces que el proceso $X(t)$ definido en (1.19) converge en distribución al proceso de Wiener (Kloeden y Platen, 1992).

tomar $\sigma^2 = 2D$, lo que nos proporciona una nueva interpretación de D como intensidad del ruido responsable del movimiento aleatorio. Tal y como lo hemos definido, el proceso de Wiener tiene otras propiedades útiles que se detallan en el apéndice A junto con su demostración o, en algunos casos, argumentos sencillos que, sin constituir una demostración, permiten alcanzar cierto grado de intuición sobre el significado de la propiedad en cuestión. Entre ellas, resulta especialmente relevante el hecho de que los incrementos del proceso de Wiener $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ son de orden \sqrt{dt} , que tiene como consecuencia que las trayectorias de $W(t)$ no sean derivables en casi ningún punto, es más, ni siquiera son de variación acotada en un intervalo acotado. La no diferenciabilidad tiene implicaciones importantes para la ecuación de Langevin, como veremos en la siguiente sección.

1.1.3 La ecuación de Langevin

A partir de la publicación del artículo de Einstein sobre el movimiento browniano, se hicieron varios intentos de expresar la dinámica de dicho movimiento en términos de ecuaciones diferenciales. La más conocida es probablemente la ecuación de Langevin. Langevin propuso (Keizer, 1987) considerar la mecánica de la partícula browniana desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, y escribió las ecuaciones de movimiento en su forma habitual

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p} \quad (1.34)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.35)$$

con $\vec{p} = m\vec{v}$, el momento de la partícula. La fuerza \vec{F} tiene dos contribuciones. Por una parte, un término sistemático cuyo origen es la fuerza viscosa que el fluido ejerce sobre la partícula cuando esta se desplaza y que podemos escribir como $\vec{F}_v = -\gamma\vec{v} = -\gamma/m\vec{p}$, donde γ es la constante de fricción. La otra contribución de la fuerza es un proceso estocástico $\vec{\xi}(t)$ (tres procesos independientes en realidad, uno por componente) que representa el efecto de las colisiones con las moléculas del fluido. Las propiedades estadísticas de $\vec{\xi}(t)$ debemos determinarlas a partir de las propiedades de un fluido en equilibrio con un baño térmico a temperatura T , como veremos.

La principal ventaja de las ecuaciones de Langevin es que, como se basan en la dinámica newtoniana, las ecuaciones de movimiento se pueden generalizar para incluir cualquier otro tipo de fuerzas que actúen sobre la partícula \vec{F}_e , simplemente añadiendo dichas fuerzas a la ecuación para el momento \vec{p} :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p} \quad (1.36)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_v + \vec{\xi}(t) + \vec{F}_e \quad (1.37)$$

Así, las ecuaciones de Langevin permiten estudiar partículas brownianas sometidas a potenciales, o cualquier tipo de forzamiento externo, tanto en situa-

ciones de equilibrio como de no equilibrio, situaciones estas en las que aparecen comportamientos más ricos y complejos, como ocurre por ejemplo en los motores brownianos.

El momento de la partícula cambia de forma aleatoria por lo que el propio momento será también una variable aleatoria. Lo primero que se debería exigir a la ecuación de Langevin es que reproduzca el hecho de que en promedio las partículas en el seno del fluido sufren amortiguamiento de su momento de forma que en el estado de equilibrio ($t \rightarrow \infty$) el momento no cambia en valor medio. Es natural entonces tomar $\langle \vec{\xi}(t) \rangle = 0$, de forma que el valor medio del momento evoluciona según

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p}(t) \rangle = -\frac{\gamma}{m} \langle \vec{p}(t) \rangle, \quad (1.38)$$

produciendo el amortiguamiento esperado.

Para completar las propiedades de la fuerza aleatoria, podemos describir cada componente $\xi_i(t)$ a través del incremento de momento dW_i que produce en la partícula en un intervalo infinitesimal de tiempo dt . En componentes, tenemos:

$$dW_i = W_i(t + dt) - W_i(t) = \xi_i(t)dt, (i = 1, 2, 3). \quad (1.39)$$

Como la fuerza es originada por colisiones moleculares es razonable admitir que cambie de forma aleatoria y rápida. Si el fluido está en equilibrio, el incremento de momento producido en t debe de ser independiente de la historia anterior de incrementos. Lo más sencillo que podemos hacer es tomar estos incrementos $dW(t)$ como los incrementos de un proceso de Wiener, y $W(t)$ como dicho proceso. Al igual que hicimos anteriormente, debemos utilizar un proceso de Wiener independiente para cada componente puesto que el movimiento browniano es isótropo. Además, al tomar dW como los incrementos del proceso de Wiener, la solución de las ecuaciones de Langevin en ausencia de campos externos describen correctamente el movimiento browniano. Aunque se puede resolver directamente el sistema de ecuaciones (Keizer, 1987), el límite sobreamortiguado resulta mucho más sencillo e igualmente ilustrativo.

El límite sobreamortiguado de las ecuaciones de Langevin consiste en suponer que el momento alcanza muy rápidamente su estado de equilibrio, pudiendo simplificar las ecuaciones al tomar $\frac{d\vec{p}}{dt} \simeq 0$. En general, podremos tomar el límite sobreamortiguado cuando $m/\gamma \ll \tau$, donde τ es un tiempo característico del sistema, relacionado generalmente con el forzamiento exterior. En ausencia de forzamiento externo, τ podría representar el tiempo característico con el que observamos los desplazamientos de la partícula browniana. Tomando

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (1.40)$$

en la ecuación de Langevin para el momento (1.37) escribimos

$$0 = -\gamma/m\vec{p} + \vec{\xi}(t) + \vec{F}_e \quad (1.41)$$

donde ya hemos sustituido el valor de la fuerza de viscosidad. Utilizando la ecuación (1.36), el sistema se reduce a

$$\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\xi}(t) + \vec{F}_e. \quad (1.42)$$

En ausencia de campo externo, esperamos que la solución $\vec{r}(t)$ represente un movimiento browniano. En efecto, para la componente $X(t)$, por ejemplo, tenemos

$$dX = \frac{\xi_1(t)}{\gamma} dt = \frac{1}{\gamma} dW_1 \quad (1.43)$$

de donde se deduce que $X(t) = W_1(t)/\gamma$ es un proceso de Wiener, que como ya hemos visto, reproduce adecuadamente las propiedades del movimiento browniano.

En realidad, tanto el proceso de Wiener como la ecuación de Langevin sobrearmortiguada presentan una divergencia en el valor de la velocidad cuadrática media

$$\frac{d}{dt} \langle |\vec{r} - \vec{r}_0| \rangle \quad (1.44)$$

para tiempos muy pequeños. Las ecuaciones de Langevin completas, con ambos grados de libertad \vec{r} y \vec{p} permiten resolver esta divergencia. No obstante, tanto la solución en el límite sobrearmortiguado como en el caso general predicen el comportamiento correcto a tiempos largos, a saber, $\langle (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 \rangle = 6Dt$. En lo sucesivo, nos restringiremos al caso sobrearmortiguado.

Aunque la elección de $dW_i = \xi_i(t)dt$ resulta razonable, tiene un inconveniente. Esta expresión indica que $\xi_i(t)$ es en cierto sentido la derivada del proceso de Wiener. Sin embargo, ¡las trayectorias del proceso de Wiener son no diferenciables en casi todo punto! Así pues, es necesario dar sentido matemático a la definición $dW = \xi(t)dt$ ⁶. Por sencillez, eliminaremos el índice a partir de ahora ya que la discusión es idéntica para cada coordenada. La opción habitual es tomar la ecuación de Langevin

$$\gamma \frac{dX}{dt} = \xi(t) + F_e \quad (1.45)$$

como una forma abreviada de escribir

$$\gamma dX = dW + F_e dt. \quad (1.46)$$

Para obtener una solución de esta ecuación, tendríamos que integrar ambos miembros. Si F_e no depende de X , formalmente escribiríamos

$$\gamma \int dX = \int dW(t) + \int F_e dt \quad (1.47)$$

⁶En el apéndice D mostramos que el proceso estocástico generalizado conocido como ruido blanco gaussiano es en cierto sentido la derivada temporal del proceso de Wiener. De hecho, es habitual tomar $\xi(t)$ como un ruido blanco gaussiano.

Sin embargo, ¿qué significado tiene el símbolo $\int dW(t)$? Sabemos que $W(t)$ no es diferenciable por lo que la integral no puede definirse como una integral de Riemann. Siendo más preciso, $W(t)$ es diferenciable como mucho en conjuntos de medida nula, por lo que a la integral tampoco se le puede dar sentido como integral de Lebesgue. Por otra parte, aún para funciones no diferenciables, es posible dar sentido a la integral como una integral de Riemann-Stieltjes si la función es de variación acotada, cosa que tampoco sucede con el proceso de Wiener (ver propiedades del proceso de Wiener en A). No obstante, las integrales basadas en los incrementos $dW(t)$, que reciben el nombre de integrales estocásticas, se pueden regularizar de ciertas maneras, siendo las más utilizadas en la práctica la interpretación de Ito y la de Stratonovich que se definen en el apéndice B.

Se podría argumentar quizás que, sea cual sea la interpretación que le demos a estas integrales, sería razonable que cumpliera al menos⁷

$$\int_a^b dW(t) = W(b) - W(a), \quad (1.48)$$

lo que nos permitiría encontrar la solución a la ecuación de Langevin

$$\gamma \frac{dX}{dt} = F_e + \xi(t) \quad (1.49)$$

como

$$\gamma(X(t) - X(0)) = W(t) + \int_0^t F_e dt'. \quad (1.50)$$

No obstante, en las situaciones más habituales en la física, la fuerza externa aplicada a la partícula dependerá de la posición $x(t)$, lo que hará necesario dar sentido a integrales de tipo

$$\int f(X) dW(t). \quad (1.51)$$

Por ejemplo, tomemos el caso $F_e = -aX$, y $\gamma = 1$ por sencillez. La ecuación correspondiente es

$$\frac{dX}{dt} = -aX(t) + \xi(t) \quad (1.52)$$

Integrando formalmente, la solución de esta ecuación debería ser

$$X(t) = X(0)e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{at'} dW(t'), \quad (1.53)$$

por lo que resulta imprescindible dar sentido a integrales más generales que $\int dW$. De hecho, si conseguimos dotar de significado a integrales de tipo

$$\int_0^t g(X(t')) dW(t) \quad (1.54)$$

⁷Y, de hecho, ese es el punto de partida para la regularización rigurosa de la integral.

entonces estaríamos a la vez dando significado a ecuaciones diferenciales estocásticas más generales que la ecuación de Langevin, ecuaciones de la forma

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t)) + g(X(t))\xi(t), \quad (1.55)$$

lo que permitiría estudiar procesos en los que la intensidad del ruido depende del estado del proceso estocástico $X(t)$, que son frecuentes por ejemplo en dinámica de poblaciones.

En el apéndice B se explican algunos detalles técnicos sobre la convergencia de las integrales de estocásticas de Ito y sus propiedades que nos serán más útiles. En esta introducción tan sólo nos ocuparemos de dos de ellas sin entrar en demasiados detalles.

1.1.4 Integrales estocásticas y la fórmula de Ito

Debido a su definición, la integral de Ito tiene la peculiaridad de que

$$\int_0^\infty W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 t \neq \frac{1}{2}W(t)^2, \quad (1.56)$$

con $\langle W(t)^2 \rangle = \sigma^2 t$. Es decir, que la integral de Ito no respeta la regla de la cadena del cálculo determinista. La explicación, que se detalla también en el apéndice B, se basa en la definición de la integral de Ito y el hecho de que los incrementos del proceso de Wiener resultan ser de orden \sqrt{dt} .

Aunque la integral de Ito no cumple la regla de la cadena habitual, sí que cumple una cierta regla de la cadena, que se conoce como *fórmula de Ito*. Teniendo en cuenta de nuevo que

$$dW(t) \sim \sigma\sqrt{dt} \quad (1.57)$$

se puede encontrar la regla de la cadena correspondiente a la integral de Ito que relaciona el diferencial de una función $Y(X(t), t)$ con los diferenciales $dX(t)$ y dt , como se muestra en el apéndice B. En concreto, sea $X(t)$ un proceso estocástico solución de

$$dX = f(X)dt + g(X)dW, \quad (1.58)$$

en la interpretación de Ito e $y(x)$ una función analítica, entonces el proceso estocástico $Y(X(t)) = y(X(t))$ cumple

$$dY = f(X(t))dt + \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial x}g(X(t))dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}g(X(t))^2\sigma^2 dt \quad (1.59)$$

que es la expresión habitual de la fórmula de Ito.

1.1.5 Ecuación de Fokker-Planck

Sea el proceso estocástico $X(t)$ definido por la ecuación de Langevin

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t)) + g(X(t))\xi(t), \quad (1.60)$$

que tomamos como abreviatura de

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad (1.61)$$

interpretada en el sentido de Ito. Entonces, la densidad de probabilidad $\rho_X(x, t)$ cumple, según se deduce en el apéndice B, la ecuación

$$\partial_t \rho_X(x, t) + \partial_x [f(x) \rho_X(x, t)] - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 [g(x)^2 \rho_X(x, t)] = 0, \quad (1.62)$$

conocida como ecuación de Fokker-Planck. La principal ventaja de la ecuación de Fokker-Planck es que, a pesar de ser una ecuación en derivadas parciales, es una ecuación determinista, de modo que aunque sea difícil de resolver, es en general más fácil de tratar que las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el caso más frecuente de que la ecuación diferencial (1.60) corresponda a la ecuación de Langevin para una partícula browniana sometida a una fuerza externa F_e , las funciones f y g y la constante σ^2 del proceso de Wiener toman los valores⁸

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} F_e(x) \quad (1.63)$$

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} \quad (1.64)$$

$$\sigma^2 = 2D\gamma^2 = \gamma^2 kT. \quad (1.65)$$

La ecuación de Fokker-Planck correspondiente tiene la forma

$$\gamma \partial_t \rho_X(x, t) + \partial_x [F_e(x) \rho_X(x, t)] - kT \partial_x^2 [\rho_X(x, t)] = 0 \quad (1.66)$$

cuya solución representa la evolución de la densidad de probabilidad de una partícula browniana con coeficiente de viscosidad γ en contacto con un baño térmico a temperatura T y sometida a una fuerza $F_e(x)$. Equivalentemente, si pensamos en una colectividad de partículas brownianas que no interactúan, $\rho(x, t)$ representaría la densidad de partículas brownianas en el punto x en el instante t .

Resulta especialmente útil expresar la ecuación de Fokker-Planck como una ecuación de conservación de la probabilidad total o del número total de partículas:

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x J(x, t) = 0 \quad (1.67)$$

donde $J(x, t)$ es entonces la corriente de probabilidad o de partículas definida por

$$J(x, t) = -\frac{1}{\gamma} \rho(x, t) F_e(x) - D \partial_x \rho(x, t). \quad (1.68)$$

Las ecuaciones (1.67) y (1.68) nos permiten encontrar fácilmente la solución en el régimen estacionario caracterizado por $\partial_t \rho(x, t) = 0$, que resulta

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)/kT}, \quad (1.69)$$

⁸Para más detalles sobre el valor de σ^2 ver apéndice D

donde $V(x)$ es el potencial asociado a la fuerza, es decir, tal que $F_e = -\frac{dV}{dx}$, y Z es una constante de normalización.

1.1.6 Algoritmo de Euler

La fórmula de Ito proporciona de manera inmediata un esquema numérico para la resolución aproximada de la ecuación de Langevin

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t)) + \xi(t) \quad (1.70)$$

con condición inicial $X(0) = 0$ con probabilidad 1. Si interpretamos dicha ecuación en el sentido de Ito, la fórmula de Ito (1.59) para el proceso estocástico $Y(X(t)) = X(t)$ se expresa

$$dY(t) = dX(t) = f(X(t))dt + dW(t), \quad (1.71)$$

puesto que $y(x) = x$ y $g(x) = 1$. Equivalentemente, podemos expresarla como límite de los incrementos finitos $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$, y $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = f(X(t))\Delta t + \Delta W(t), \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0. \quad (1.72)$$

De modo que para un Δt finito, podemos aproximar $X(t + \Delta t)$ por ⁹

$$X(t + \Delta t) \approx X(t) + f(X(t))\Delta t + \Delta W(t). \quad (1.73)$$

Puesto que el miembro de la derecha no depende más que de X y ΔW en el instante t , podemos construir de forma aproximada la trayectoria de la solución $X(t)$ en tiempos $t = i\Delta t$, con $i = 0, 1, \dots, n$, partiendo de la condición inicial $X(0) = 0$ y utilizando (1.73) iterativamente. Para ello, no obstante, debemos obtener el valor de los incrementos $\Delta W(t)$. Como se puede comprobar en el apéndice A, los incrementos del proceso de Wiener $W(t + \Delta t) - W(t)$ para un t dado son también procesos de Wiener con distribución gaussiana, de media nula y varianza

$$\langle (\Delta W(t))^2 \rangle = \langle (W(t + \Delta t) - W(t))^2 \rangle = \sigma^2 \Delta t, \quad (1.74)$$

independientemente del valor de t . Por lo tanto, basta generar un número aleatorio cuya distribución sea una gaussiana de media nula y varianza dada por (1.74) en cada iteración del proceso.

El algoritmo formado por la generación de dicho número aleatorio y la iteración de (1.73) constituye el algoritmo de Euler-Mayurama para la integración numérica de Ecuaciones diferenciales estocásticas¹⁰.

⁹Como en la fórmula de Ito ha de entenderse el igual en sentido cuadrático medio, esto significa que $X(t) + f(X(t))\Delta t + \Delta W(t)$ converge en valor cuadrático medio a $X(t + \Delta t)$ a medida que Δt tiende a 0.

¹⁰Al derivarse directamente de la fórmula de Ito, el algoritmo de Euler converge a la solución de la ecuación diferencial estocástica en la interpretación de Ito. En nuestro caso, al tratarse de una ecuación con ruido aditivo, es también solución de la ecuación interpretada a la Stratonovich. No obstante, el algoritmo de Euler que se obtiene procediendo de forma idéntica para el caso de ruido multiplicativo convergerá a la solución en la interpretación de Ito y no a la de Stratonovich.

1.1.7 Ruido blanco gaussiano

En el apéndice D mostramos como al proceso estocástico $\xi(t)$, que hemos definido de manera que los incrementos del proceso de Wiener verifiquen

$$dW(t) = \xi(t)dt, \quad (1.75)$$

se le puede dotar de un significado más preciso definiéndolo como un proceso estocástico gaussiano de media nula y covarianza dada por la delta de Dirac:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'). \quad (1.76)$$

A una covarianza del tipo (1.76) le corresponde un espectro plano o constante en el dominio de las frecuencias, razón por la cual a este proceso se le conoce como ruido *blanco* gaussiano.

De la expresión (1.75) se deduce que $\xi(t)$ tendría que ser la derivada del proceso de Wiener. No obstante, el proceso de Wiener es no derivable en casi todo punto (para una explicación intuitiva de esta propiedad del proceso de Wiener consultar el apéndice A), o lo que es lo mismo el límite $h \rightarrow 0$ del proceso

$$X(t) = \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \quad (1.77)$$

no existe en sentido estricto. Sin embargo, como se puede comprobar en el apéndice D, el espectro del proceso $X(t)$ se vuelve cada vez más plano a medida que h tiende a cero, y su covarianza por tanto se parece cada vez más a una delta de Dirac. Es en este sentido en el que podemos afirmar que el ruido blanco gaussiano es la derivada del proceso de Wiener e interpretar el símbolo $\xi(t)$ que aparece en la ecuación de Langevin como un proceso estocástico generalizado cuya covarianza viene dada por la función generalizada o distribución delta de Dirac, esto es, un ruido blanco gaussiano.

1.2 Flashing ratchet o motor de encendido y apagado

1.2.1 El efecto “ratchet”

¿Es posible obtener trabajo útil a partir de fluctuaciones aleatorias que en promedio resultan nulas o sin dirección o efecto preferencial? En el mundo macroscópico, estas tareas las desempeñan artilugios mecánicos o dispositivos electrónicos comúnmente denominados *rectificadores*. Algunos ejemplos mecánicos son los relojes de pulsera que se dan cuerda aprovechando los movimientos aleatorios de la muñeca, o las carracas, que giran en una sola dirección al agitarlas más o menos de cualquier manera. En electrónica, el ejemplo más representativo de un rectificador es, por supuesto, el diodo.

Más sutil es el caso de las fluctuaciones microscópicas de origen térmico. La pregunta, ¿es posible rectificar las fluctuaciones térmicas del movimiento

browniano y realizar un trabajo? tiene su origen en un “Gedankenexperiment” propuesto por Smoluchowski (Smoluchowski, 1912) y extendido después por Feynman en sus *Lectures* (Feynman *et al.*, 1963).

Lo cierto es que se puede obtener trabajo a partir del movimiento browniano mediante lo que se ha denominado “efecto ratchet”. Este efecto consiste en la aparición de una corriente dirigida o transporte de partículas en una dirección preferencial como consecuencia del efecto de una perturbación periódica o aleatoria de promedio nulo actuando sobre una o varias partículas brownianas inmersas en un sistema periódico en el espacio pero asimétrico. Habitualmente, dicha corriente sigue existiendo incluso en presencia de una pequeña fuerza global en la dirección contraria al movimiento, por lo que las partículas brownianas pueden realizar una cierta cantidad de trabajo.

El efecto ratchet tiene tanto implicaciones para la Mecánica Estadística como para la (nano-)tecnología o la biofísica. Por un lado, Smoluchowski propuso su experimento mental para la comprensión más profunda de la Segunda Ley de la Termodinámica y sus implicaciones. Smoluchowski se dio cuenta de que el equilibrio térmico prohíbe la aparición de transporte dirigido, incluso aunque el sistema sea espacialmente asimétrico. Lo contrario, supondría una violación de la Segunda Ley ya que el dispositivo estaría extrayendo trabajo a partir de un solo baño térmico. De esta manera, el otro ingrediente fundamental para la aparición del efecto ratchet, aparte de la simetría espacial¹¹, es la ruptura del equilibrio térmico. Fue Feynman quien introdujo dicho ingrediente en el experimento de Smoluchowski al colocar el dispositivo simultáneamente en contacto con dos baños térmicos.

No obstante, las posibles maneras de sacar al sistema del equilibrio son innumerables, dando lugar a muchos tipos de estos sistemas llamados generalmente ratchets o motores brownianos. Para una revisión extraordinariamente completa de los distintos tipos de motores brownianos, recomendamos consultar (Reimann, 2002) que además constituye una interesante introducción al campo sin necesidad de demasiados conocimientos previos. Nosotros centraremos nuestra atención tan solo en un ejemplo concreto de las diversas realizaciones de motores brownianos, el conocido comúnmente como “flashing ratchet” o ratchet de encendido y apagado.

La reinención o reinterpretación de la flashing ratchet en 1992 por Ajdari y Prost (Ajdari y Prost, 1993) y de la “rocking ratchet” por Magnasco (Magnasco, 1993), junto con trabajos importantes de estos y otros autores en 1994 (ver las referencias citadas en (Reimann, 2002)), estimularon una sustancial actividad y progreso por parte de la comunidad de la física estadística, que continúa hoy en día.

En general, la rectificación de fluctuaciones térmicas resulta de interés en sistemas lo suficientemente pequeños como para que tengan un efecto importante, como algunos dispositivos nanotecnológicos o en el campo de la biología,

¹¹El requerimiento de asimetría espacial se puede sustituir por otro tipo de ruptura de simetría, apareciendo por ejemplo el efecto ratchet en sistemas espacialmente simétricos al perturbarlos con señales externas de promedio nulo pero asimétricas temporalmente, o en motores colectivos, a través de una ruptura espontánea de la simetría espacial.

en los fenómenos de transporte intracelular, más en concreto en la bioquímica de los llamados motores y bombas moleculares presentes en las células.

En el caso de los motores moleculares los trabajos de Magnasco (1993; 1994), Prost, Ajdari y colaboradores (Prost *et al.*, 1994; Jülicher *et al.*, 1997) y Astumian y Bier (1994; 1996) son algunos ejemplos de entre muchos otros en los que se introducen modelos microscópicos basados en el fenómeno ratchet y que suponen una aproximación cuantitativa más allá de la teoría de respuesta lineal cerca del equilibrio. En el caso de las bombas moleculares, el desarrollo más importante se dio a partir de la interpretación de evidencias experimentales como un efecto ratchet por Tsong, Astumian y colaboradores (Tsong y Astumian, 1996; Westerhoff *et al.*, 1986).

Aunque inicialmente el modelado de los motores moleculares fue una de las motivaciones principales, los motores brownianos han sido generalizados y aplicados a un número creciente de aplicaciones físicas y tecnológicas. En la física de materiales los ejemplos de este efecto son muy abundantes, abarcando desde el transporte de partículas coloidales (Rousselet *et al.*, 1994), movimiento de vórtices magnéticos en superconductores (Villegas *et al.*, 2003; Linke, 2002), dispositivos cuánticos SQUID (Reimann, 2002), o dispositivos de control de “microgotas”, átomos en redes ópticas y dispositivos electroforéticos basados en efecto ratchet (Linke, 2002), por citar solo algunos ejemplos.

1.2.2 “Flashing ratchet”: definición

La flashing ratchet consiste en una partícula browniana en una dimensión sometida a un potencial periódico en el espacio pero asimétrico que puede conectarse o desconectarse a voluntad de un controlador o agente externo. Con esta definición, podemos representar la dinámica de la partícula mediante la siguiente ecuación de Langevin

$$\gamma \dot{X}(t) = -\alpha(t)V'(X) + \xi(t), \quad (1.78)$$

donde $X(t)$ representa la posición de la partícula en el instante t , $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, γ el coeficiente de fricción de la partícula, y $\xi(t)$ es un ruido blanco gaussiano de media nula y correlación

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\gamma kT\delta(t - t'). \quad (1.79)$$

El potencial $V(x)$ es un potencial periódico de periodo L y asimétrico, de modo que $-V'(x) = -\frac{dV}{dx}$ es la fuerza debida al potencial que siente una partícula colocada en la posición x . En el caso más sencillo y habitual de flashing ratchet, el potencial $V(x)$ es un potencial formado por dos tramos rectos de distinta pendiente, definido como

$$V(x) = \begin{cases} \frac{V_0}{a} \frac{x}{L} & \text{si } 0 \leq \frac{x}{L} \leq a \\ -\frac{V_0}{(1-a)} \left(\frac{x}{L} - a \right) + V_0 & \text{si } a \leq \frac{x}{L} \leq 1 \end{cases} \quad (1.80)$$

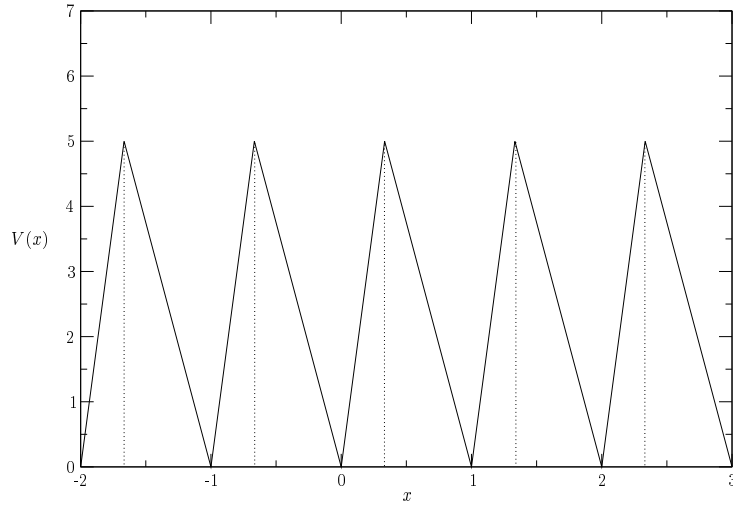


Figura 1.2: Potencial asimétrico de dientes de sierra al que se ven sometidas las partículas brownianas. En unidades $L = 1$, $D = 1$ y $kT = 1$, los parámetros del potencial valen $V_0 = 5$ y $a = 1/3$.

y extendido de periódicamente $V(x + L) = V(x)$ fuera de la región $[0, L]$ como se ve en la figura 1.2. Con esta definición, la asimetría está controlada por el parámetro $0 < a < 1$, de manera que el potencial es asimétrico si $a \neq 1/2$. Por otra parte, el parámetro V_0 controla la altura o intensidad del potencial. A lo largo de toda la tesis, salvo en la sección 5.2 donde se utiliza una versión suavizada con expresión analítica, hemos utilizado el potencial definido por (1.80) con periodo espacial $L = 1$, $a = 1/3$ y $V_0 = 5kT$, que posee una asimetría moderada y un valor de la barrera de potencial algunas veces superior a la energía promedio del baño térmico. También tomaremos en general unidades de tiempo tales que $\gamma = 1$ y de energía de modo que $kT = 1$, de donde se deduce que el coeficiente de difusión de la partícula será $D = kT/\gamma = 1$. Para estos valores de los parámetros, el potencial $V(x)$ tiene la forma de “dientes de sierra” representada en la figura 1.2.

Por motivos bastante obvios a la vista de la figura, llamaremos “tramo corto” a la región del eje x donde el potencial tiene pendiente positiva, definida por $0 \leq x/L \leq a$, y “tramo largo” al tramo donde tiene pendiente negativa.

Finalmente, el parámetro $\alpha(t)$ sólo puede tomar uno de los dos valores $\{0, 1\}$, de modo que controla el estado del potencial, tomando el valor $\alpha = 1$ cuando el potencial se encuentra encendido o conectado, y $\alpha = 0$ cuando el potencial se encuentra desconectado.

1.2.3 Comportamiento

En esta sección trataremos de explicar de la forma más intuitiva posible la física del efecto ratchet que aparece al apagar y encender el potencial $V(x)$ de forma periódica o incluso aleatoria. Para ello, utilizaremos una aproximación al fenómeno bastante cualitativa. Los detalles matemáticos pueden consultarse en las referencias citadas o en la abundante literatura sobre la flashing ratchet. Comenzaremos por describir los comportamientos asintóticos que se obtienen al mantener el potencial bien encendido o bien apagado durante un tiempo suficientemente largo.

Cuando el potencial permanece apagado ($\alpha = 0, \forall t$), la partícula realiza por definición un movimiento browniano. En efecto, la ecuación de Fokker-Planck (1.66) que describe el proceso toma la forma

$$\partial_t \rho(x, t) = D \partial_x^2 \rho(x, t) \quad (1.81)$$

que coincide con la ley de Fick para la difusión. Como vimos, si comenzamos con la partícula en $x(0) = 0$, la solución a la ecuación de difusión es una gaussiana cuya anchura crece como $\sqrt{2Dt}$. Si pensamos en $\rho(x, t)$ como una densidad de partículas brownianas, esto significa que siempre que comencemos con las partículas en un paquete apretado, las partículas se difundirán en torno a dicha posición, ensanchándose la distribución de forma aproximadamente gaussiana. El hecho más relevante en lo que se refiere al transporte de partículas es que la difusión es isotrópica, de modo que no hay transporte neto en ninguna dirección. De hecho, si promediamos la ecuación de Langevin (1.78) para $\alpha = 0$ obtenemos

$$\langle \dot{x} \rangle = 0, \quad (1.82)$$

es decir, que la partícula o partículas no se mueven en promedio en ninguna de los dos sentidos positivo o negativo.

Por otro lado, si el potencial se encuentra siempre encendido ($\alpha = 1, \forall t$), la ecuación de Fokker-Planck se escribe

$$\gamma \partial_t \rho(x, t) + \partial_x [V'(x) \rho(x, t)] - kT \partial_x^2 [\rho(x, t)] = 0. \quad (1.83)$$

Como el potencial no depende del tiempo, es razonable suponer que la distribución de partículas alcanzará finalmente un estado estacionario caracterizado por $\partial_t \rho_{\text{est}}(x, t) = 0$. de modo que se cumpla

$$\partial_x [V'(x) \rho(x, t)] - kT \partial_x^2 \rho_{\text{est}}(x, t) = 0, \quad (1.84)$$

Además, debido a la periodicidad espacial del potencial, podemos restringirnos a la región $0 \leq x \leq L$ y tomar condiciones de contorno periódicas $\rho_{\text{est}}(0) = \rho_{\text{est}}(L)$. La solución a este problema (los detalles de la resolución se pueden comprobar en la sección 5.1.4 donde se resuelve un problema algo más general que se puede reducir al caso que nos interesa aquí) es

$$\rho_{\text{est}}(x) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)/kT}, 0 \leq x \leq L \quad (1.85)$$

donde Z es una constante de normalización. Es fácil comprobar que para este estado la corriente de partículas J resulta nula¹²:

$$J(x) = \frac{1}{\gamma} \rho_{\text{est}}(x) \partial_x V(x) - kT \partial_x \rho_{\text{est}}(x) = 0, \quad (1.86)$$

por lo que no hay tampoco en este caso transporte de partículas neto en ninguno de los dos sentidos. De hecho, como veremos en la sección 5.1.4, una corriente J constante se relaciona con la velocidad promedio según

$$\langle \dot{x} \rangle = JL, \quad (1.87)$$

de modo que en este caso también obtenemos $\langle \dot{x} \rangle = 0$. Podemos pensar en este proceso de difusión como en un proceso de salto de barreras de potencial activado por la agitación térmica. En él, las partículas pasarían la mayor parte del tiempo cerca de los mínimos del potencial. En ocasiones, alguna partícula conseguirá del baño térmico la energía suficiente como para saltar la barrera de potencial y moverse hasta un pozo contiguo. En el equilibrio, la probabilidad de saltar una barrera de potencial será proporcional a un factor tipo Arrhenius $e^{-\Delta V/kT}$, donde ΔV es la diferencia de potencial entre el máximo y el mínimo, es decir, la barrera de potencial que se ha de sobrepasar. Nótese que como la probabilidad de saltar no depende más que de la barrera de potencial, y no de la pendiente del potencial, la probabilidad de saltar de pozo en pozo hacia la derecha es la misma que hacia la izquierda incluso para potenciales asimétricos, obteniéndose un flujo neto nulo.

Es interesante también reflexionar brevemente sobre el efecto de incluir una fuerza constante negativa $F_e = -F$, $F > 0$ en la ecuación de Langevin (1.78)

$$\gamma \dot{X}(t) = -\alpha(t) V'(X) - F + \xi(t), \quad (1.88)$$

Si el potencial permanece apagado, al movimiento difusivo se superpone un movimiento de arrastre, de modo que las partículas se moverán en promedio hacia valores de x decrecientes. Tomando promedios en (1.88), obtenemos una velocidad promedio negativa

$$\langle \dot{x} \rangle = -\frac{F}{\gamma}. \quad (1.89)$$

El caso en el que el potencial permanece encendido se puede resolver incluyendo la fuerza $-F$ dentro del término del potencial en un potencial efectivo como $V_{\text{ef}}(x) = V(x) + Fx$. La expresión de la corriente (que también se puede encontrar a partir de las expresiones que aparecen en la sección 5.1.4) resulta algo compleja, pero su signo coincide con el signo de la diferencia $V_{\text{ef}}(0) - V_{\text{ef}}(L) = -FL < 0$, por lo que también tendremos en este caso un flujo de partículas hacia la izquierda. Nótese que este caso equivale a “inclinarse” el potencial periódico $V(x)$ hacia la izquierda, de forma que si las partículas tienen energía suficiente para saltar las barreras, acabarán derivando hacia la izquierda, en sentido negativo de las x .

¹²Esto no es más que la constatación de que el estado estacionario (1.85) es en realidad un estado de equilibrio y como tal cumple el principio de balance detallado.

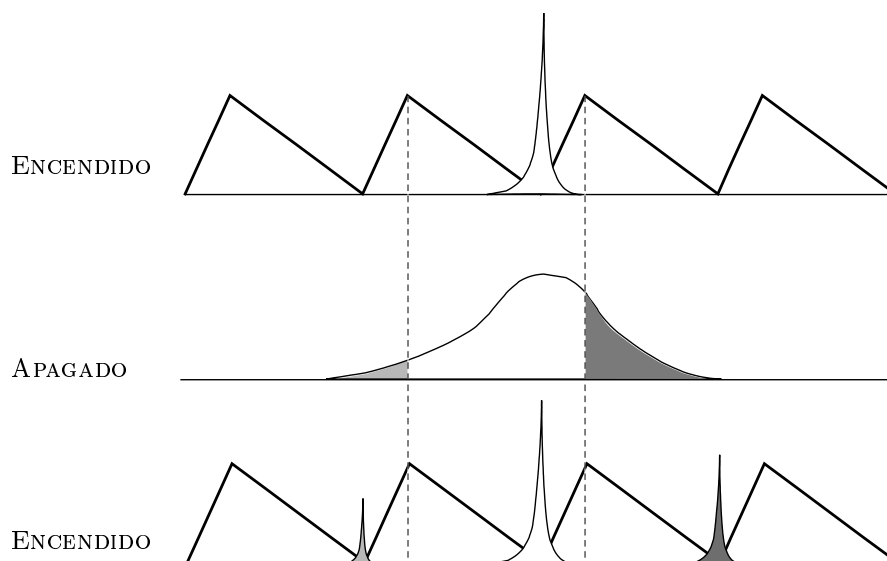


Figura 1.3: Funcionamiento de la flashing ratchet. La figura representa el potencial y la densidad de partículas en tres instantes diferentes.

No es difícil mostrar que si encendemos y apagamos el potencial de la figura 1.2 de forma periódica las partículas adquieren, en ausencia de la fuerza externa $-F$, un movimiento promedio hacia la derecha. Si el potencial permanece encendido durante un tiempo suficiente, como la altura del potencial es varias veces la energía promedio de las partículas, estas tenderán a agruparse cerca de los mínimos. Supongamos que empezamos con el potencial encendido y todas las partículas concentradas cerca de uno solo de los mínimos del potencial como se muestra en la parte de arriba de la figura 1.3.

Cuando se desconecta el potencial, las partículas se difunden y la densidad de partículas se ensancha como muestra la parte central de la figura. Si el potencial se conecta de nuevo entonces, las partículas volverán al mínimo inicial o caerán hacia uno de los mínimos adyacentes dependiendo de su posición. Las partículas en la región más oscura se verán arrastradas por el potencial hasta el mínimo de la derecha, las de la pequeña región gris se moverán hasta el mínimo de la izquierda y las de la región blanca volverán a sus posiciones iniciales. Como se ve claramente en la figura, debido a la asimetría del potencial caen más partículas en el mínimo de la derecha que en el de la izquierda, lo que provoca un movimiento neto de partículas hacia la derecha. Para que esto ocurra, el periodo de apagado tiene que ser del orden del tiempo medio que tarda una partícula en alcanzar la posición de la barrera más próxima en su movimiento de difusión. Igualmente, durante el periodo de encendido, las partículas deben tener tiempo suficiente para verse arrastradas por el potencial hasta alguno de los mínimos. De modo que el periodo no debe de ser demasiado corto. Si lo

es, las partículas sentirán en la práctica el efecto de un potencial constante promediado entre el potencial de dientes de sierra correspondiente al estado conectado y el potencial nulo correspondiente al estado desconectado. En esta situación, la densidad de probabilidad alcanzará un estado de equilibrio con el potencial promedio y el flujo de partículas será nulo.

Por otra parte, como hemos visto anteriormente, tanto si el potencial permanece siempre encendido como apagado, el flujo de partículas resulta nulo. Por tanto, para periodos muy largos, mucho mayores que el tiempo medio que tardan las partículas en recorrer un periodo, bien por arrastre o bien por difusión, el flujo de partículas será prácticamente nulo también. Existe entonces un valor del periodo que produce el máximo flujo, que corresponde a un compromiso entre el tiempo de difusión entre el mínimo y el máximo y el tiempo de arrastre desde el máximo del potencial hasta el mínimo (Jülicher *et al.*, 1997).

De hecho, el efecto permanece incluso si el encendido y apagado se produce de forma aleatoria siempre y cuando los tiempos medios de encendido y apagado cumplan esos mismos requisitos (ver (Astumian y Bier, 1994) para los detalles).

Para perturbaciones periódicas con periodos de encendido adecuados y potenciales con barreras de altura mucho mayor que la energía térmica kT , el análisis del modelo se realiza en completa analogía con lo indicado en la discusión anterior sobre la figura 1.3, pudiéndose expresar la velocidad media $\langle \dot{x} \rangle$ en forma analítica como aparece en (Ajdari y Prost, 1993). Utilizando dos ecuaciones de Fokker-Planck, una para cada estado del potencial, y añadiendo dos términos correspondientes a las transiciones entre ambos estados, se puede obtener también la corriente de partículas inducida en el caso de encendido y apagado aleatorio (Astumian y Bier, 1994).

En lugar de reproducir las expresiones para la velocidad promedio hemos optado por presentar evidencia del transporte de partículas mediante simulaciones numéricas. Las figuras 1.4 y 1.5 muestran el resultado de promediar las trayectorias $x(t)$ de 500 partículas brownianas independientes para el encendido y apagado periódico y aleatorio, respectivamente, del potencial de la figura 1.2. Las simulaciones se han llevado a cabo utilizando el algoritmo de Euler descrito en la sección 1.1.6 y explicado con mayor detalle para el caso periódico en la sección 5.1.8. El encendido y apagado aleatorio se ha simulado mediante un ruido dicotómico con probabilidad de transición por unidad de tiempo λ constante, que se puede aproximar realizando un cambio de potencial en cada paso temporal Δt con probabilidad $\lambda \Delta t$.

Ambas figuras muestran que la posición media de las partículas crece de forma aproximadamente lineal con el tiempo, indicando que las partículas se mueven hacia la derecha, en el sentido de la fuerza correspondiente al tramo largo del potencial. Las figuras muestran también un comportamiento no monótono de la velocidad media en función del periodo de encendido o la probabilidad de transición del encendido aleatorio, siendo la velocidad mayor para periodos o probabilidades de transición no demasiado largos o cortos.

El efecto ratchet presente en este tipo de motor browniano puede verse como una rectificación del ruido térmico asociado a la difusión. La difusión es simétrica: algunas partículas se mueven hacia la izquierda y otras hacia la derecha,

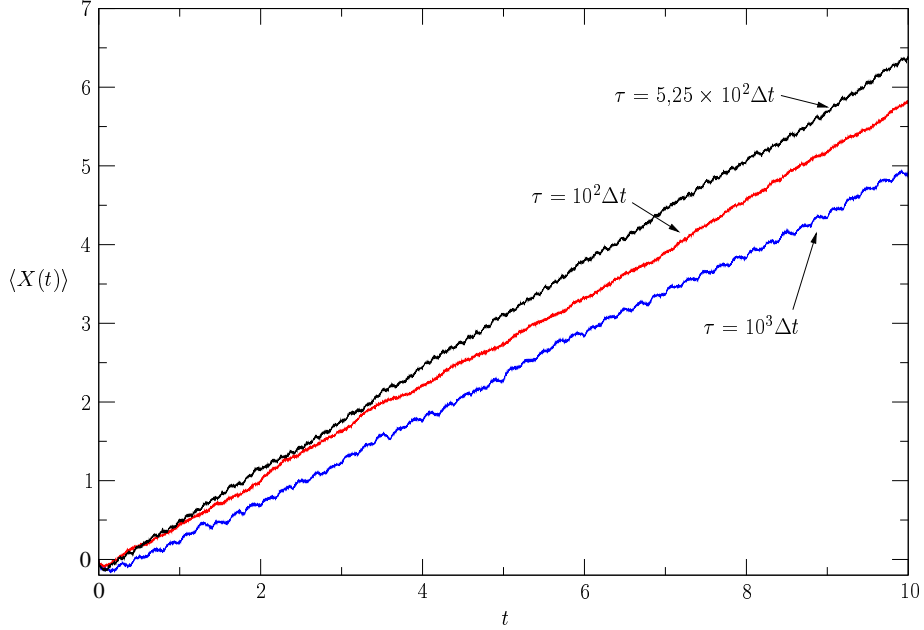


Figura 1.4: Simulaciones mediante el algoritmo de Euler de la flashing ratchet con conexión y desconexión periódica del potencial de sierra con intensidad $V_0 = 5kT$, $L = 1$ y $a = 1/3$. τ indica el número de pasos que el potencial está encendido o apagado, es decir, el semiperiodo del potencial. La posición media de las partículas crece más rápido para un periodo intermedio que para uno demasiado largo o corto. Todas las simulaciones se han promediado sobre 500 realizaciones, con $D = 1$, $kT = 1$, y paso temporal $\Delta t = 10^{-4}$.

pero la posición media no cambia. Cuando se produce la conexión del potencial, la mayor parte de las partículas que se movieron hacia la izquierda vuelven a la posición inicial, mientras que muchas de las que lo hicieron hacia la derecha se ven empujadas hasta el siguiente mínimo de la derecha. El potencial asimétrico actúa como un rectificador anulando el efecto de las fluctuaciones negativas de la posición y reforzando las positivas, produciendo una velocidad promedio positiva.

Normalmente la velocidad promedio depende de la fuerza externa de forma continua, de modo que el transporte de partículas permanece para fuerzas externas negativas $F_e = -F$, $F > 0$ siempre que sean lo suficientemente pequeñas. En este caso, la ratchet induce movimiento en contra de la fuerza aplicada, de modo que las partículas realizan un trabajo y el sistema funciona como un motor. La ratchet con fuerza externa exhibe una curiosa propiedad. Si el potencial permanece encendido o apagado, las partículas brownianas se mueven en la dirección de la fuerza, mientras que se mueven en contra de la misma al encender y apagar el potencial. Esta es la esencia de la paradoja de Parrondo que describimos en

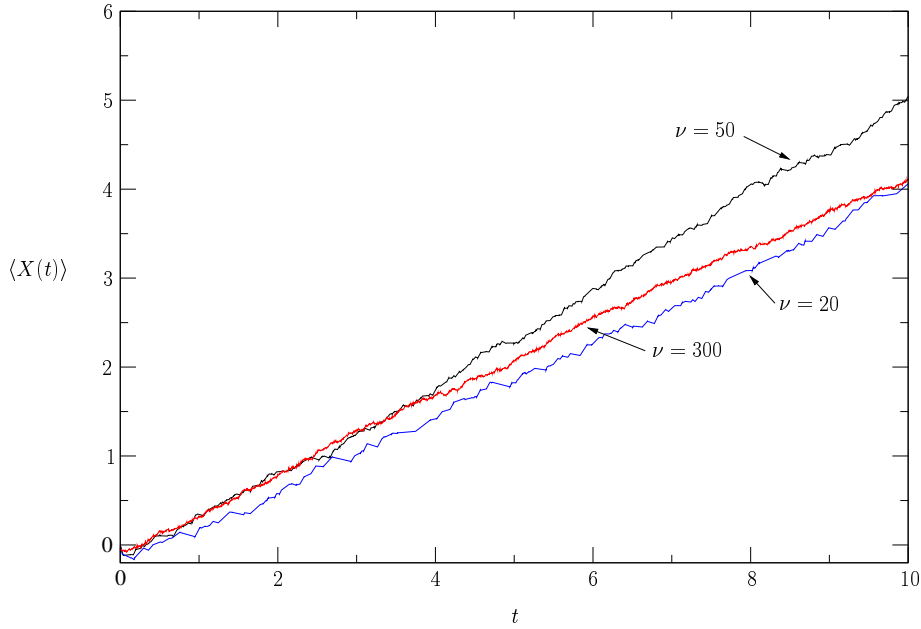


Figura 1.5: Simulaciones de la flashing ratchet con conexión y desconexión aleatoria. ν indica la probabilidad cambio de estado del potencial (encendido a apagado o viceversa) por unidad de tiempo. La velocidad media de las partículas es mayor para probabilidades de cambio intermedias, de forma que la frecuencia media de cambio no sea ni demasiado alta ni demasiado baja. Todas las simulaciones se han promediado sobre 500 realizaciones, con $D = 1$, $kT = 1$, y paso temporal $\Delta t = 10^{-4}$.

la sección 1.3, en la que dos juegos de azar perdedores se combinan de forma periódica o aleatoria dando como resultado un juego ganador.

1.3 La paradoja de Parrondo

En 1996, Parrondo mostró que la rectificación de fluctuaciones funciona también cuando el tiempo y el grado de libertad de la partícula browniana son discretos (Parrondo, 1996). Reinterpretando la posición discreta de la partícula como el capital de un jugador y la coordenada temporal como el número de turnos, formuló una versión discreta de la flashing ratchet en términos de dos juegos de azar. Estos dos juegos son la base de lo que se ha dado en llamar desde entonces *paradoja de Parrondo*: el hecho de que dos juegos de azar justos o incluso perdedores pueden dar lugar al combinarlos a un juego ganador (Harmer y Abbott, 1999a; Harmer y Abbott, 1999b).

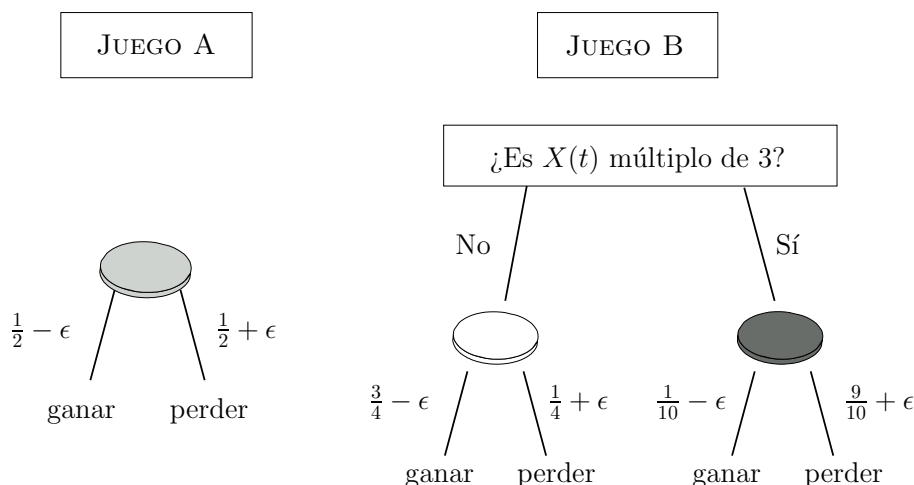


Figura 1.6: Reglas de los juegos paradójicos.

1.3.1 Los juegos originales

Consideremos dos juegos, A y B, en los que un jugador apuesta en cada turno 1 euro. Llamaremos $X(t)$ al capital acumulado por el jugador en el turno $t = 0, 1, 2, \dots$

El juego A consiste en lanzar una moneda ligeramente sesgada, de modo que la probabilidad de que el jugador gane, sea algo menor que un medio, por ejemplo, $p_A = 1/2 - \epsilon$, donde ϵ es un número pequeño y positivo.

El juego B consta de dos monedas trucadas, una “buena” y una “mala”. El jugador debe lanzar la moneda mala siempre que su capital $X(t)$ sea un múltiplo de 3. Con esta moneda, la probabilidad de ganar es de tan solo $p_m = 1/10 - \epsilon$. En cualquier otro caso, se lanza la moneda buena y la probabilidad de ganar es $p_b = 3/4 - \epsilon$. Las reglas de ambos juegos se resumen en la figura 1.6 en la que los tonos representan las probabilidades de ganar de cada moneda, siendo mayor la probabilidad de ganar cuanto más claro sea el tono.

Un jugador con intención de apostar repetidamente estará interesado en saber qué ocurrirá en promedio con su capital, en particular, si va a crecer o decrecer. Así, llamaremos ganador a un juego en el que el capital promedio sea una función creciente del número de turnos y perdedor si el capital medio decrece con el número de turnos. En caso de que no suceda ni lo uno ni lo otro, consideraremos el juego justo. Dado que hemos llamado $X(t)$ al capital del jugador en el turno $t = 0, 1, 2, \dots$, el juego es ganador si $\langle X(t) \rangle$ crece con t , perdedor si decrece con el número de turnos, y justo si es constante.

Con esta definición, tanto el juego A como el B son justos si $\epsilon = 0$ y perdedores para $\epsilon > 0$. En el juego A, si $\epsilon = 0$ la probabilidad de ganar y la de perder son iguales y en consecuencia el juego resulta justo. La cantidad promedio en

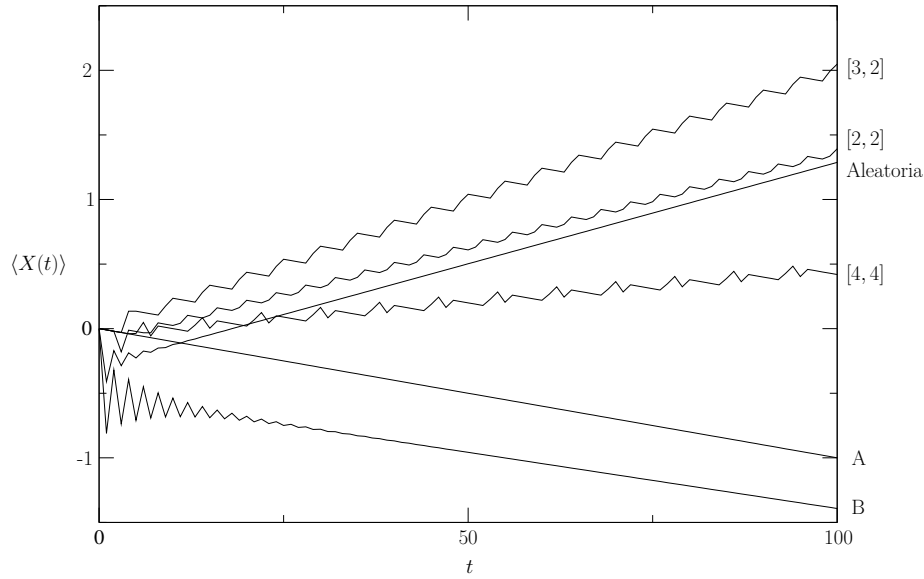


Figura 1.7: Capital promedio en función del número de turnos t para los juegos A, B, su combinación aleatoria ya algunas combinaciones periódicas. $\epsilon = 0.005$ y $[a, b]$ denota la secuencia periódica en la que se juega A (B) durante un número a (b) de turnos consecutivos.

la que crece el capital en un turno, o *ganancia* media de un juego en el que las únicas posibilidades son ganar o perder, será

$$\langle X(t+1) - X(t) \rangle = (+1)p_{\text{win}} + (-1)(1 - p_{\text{win}}) = 2p_{\text{win}} - 1 \quad (1.90)$$

de modo que si la probabilidad de ganar p_{win} es $1/2$ el juego es justo según nuestra definición anterior. Igualmente, si la probabilidad de ganar es mayor de $1/2$ el juego resulta ganador y si es menor que $1/2$ perdedor.

El análisis del juego B es algo más complejo ya que la probabilidad de ganar depende del capital. Sin embargo, veremos que para $\epsilon = 0$, el efecto de la moneda mala se compensa con el de la buena y la probabilidad de ganar resulta finalmente $1/2$, por lo que el juego B también resulta ser justo.

Si $\epsilon > 0$, la probabilidad de ganar de todas las monedas disminuye y ambos juegos resultan perdedores. Sin embargo, si en cada turno se elige el juego al azar o si se juegan de forma periódica, siguiendo una secuencia predeterminada como ABBABB..., entonces el capital medio $\langle X(t) \rangle$ crece de forma aproximadamente lineal con el número de turnos, incluso para $\epsilon > 0$, como se ve en la figura 1.7.

Como hemos dicho, la paradoja está relacionada con la flashing ratchet, de modo que el efecto ratchet nos proporciona la primera explicación del fenómeno. Si pensamos en el capital $X(t)$ como la posición de una partícula browniana en una red unidimensional, el juego A representa para $\epsilon = 0$ una discretización de la

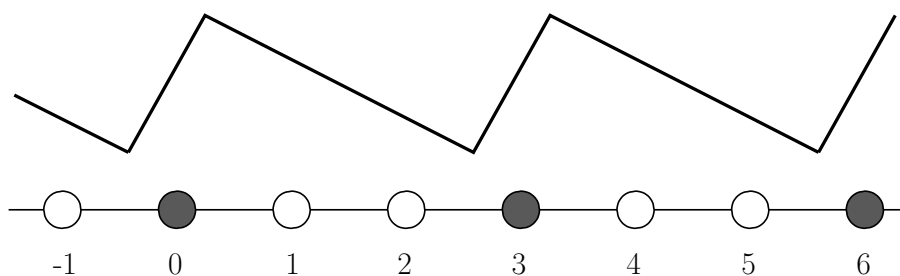


Figura 1.8: El juego B como un caminante aleatorio comparado con el potencial de dientes de sierra: la moneda mala (sitios oscuros) desempeña el papel de la fuerza negativa en el tramo corto mientras que las dos monedas buenas seguidas (sitios blancos) son el análogo de la fuerza positiva actuando en el tramo largo.

difusión¹³. El comportamiento del capital en el juego B recuerda al movimiento de la partícula bajo la acción del potencial asimétrico. En la figura 1.8 se muestra la distribución de la moneda mala y la buena en la red y se compara con el potencial de dientes de sierra. Cuando el jugador se encuentra en una posición oscura (múltiplo de 3), tiene que lanzar la moneda mala y la probabilidad de ganar es muy baja, siendo el movimiento hacia la izquierda más probable. En los sitios blancos sucede justo lo contrario. El potencial de dientes de sierra tiene un tramo corto de fuerza negativa y un tramo largo de fuerza positiva. Equivalentemente, el juego B tiene una moneda mala y dos buenas cada tres lugares, que corresponderían al tramo corto y al largo respectivamente. De forma similar a lo que ocurre en la flashing ratchet, el juego B rectifica las fluctuaciones del juego A. Supongamos que jugamos la secuencia ABBABB... y que tras jugar a B dos veces nos encontramos en una posición correspondiente a una moneda mala, digamos la posición 0. Entonces se juega A, que puede mover al jugador a la derecha o a la izquierda. Si lo hace hacia la derecha, el jugador encuentra dos monedas buenas seguidas y con alta probabilidad los dos siguientes turnos le llevarán dos posiciones más a la derecha, hasta el 3, habiendo recorrido todo un periodo espacial del juego B. Si por el contrario, el juego A mueve al jugador a la izquierda hasta el puesto -1 , la situación más probable para los dos turnos siguientes del juego B es ganar en la moneda buena y perder en la mala, volviendo a la posición -1 . Esta situación ya evidencia cierta rectificación, puesto que el jugador se mueve mayor distancia hacia la derecha que hacia la izquierda. Además, no es difícil ver que tras los siguientes tres turnos la situación más probable es pasar de la posición -1 a la posición 0 donde habíamos comenzado. De modo que los movimientos hacia la izquierda provocados por A se ven en cierta medida anulados por B mientras que los movimientos hacia la derecha se ven reforzados en los turnos siguientes. Razonamientos similares muestran que otras secuencias, como por ejemplo AABBAABB, también producen este efecto

¹³Einstein utilizó de hecho este modelo para calcular la densidad de probabilidad de una partícula browniana (Einstein, 1906).

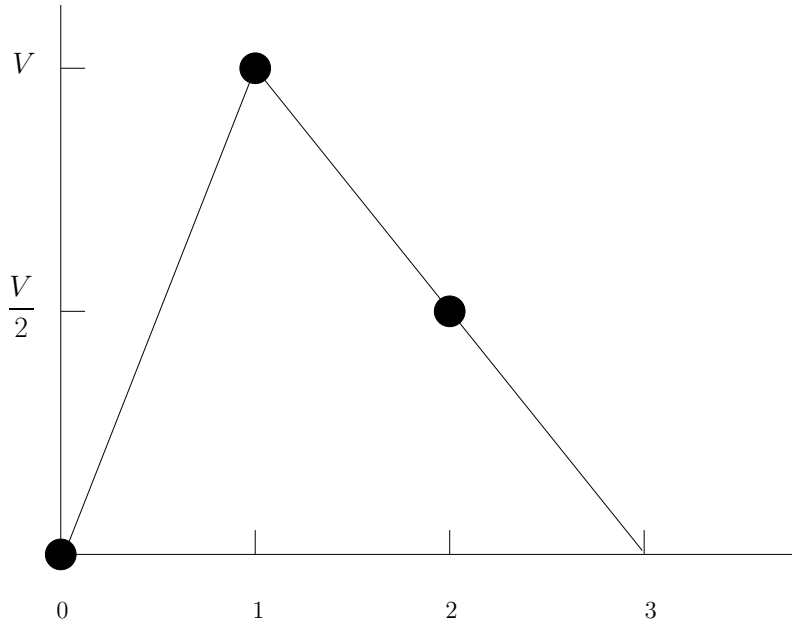


Figura 1.9: Con una cierta modificación de las probabilidades de ganar del juego B, éste puede representar el movimiento de una partícula discreta en contacto con un baño térmico y sometida al potencial representado.

de rectificación.

La analogía puede hacerse de forma más rigurosa. Parrondo y Jiménez de Cisneros (2000) explican que con una pequeña variación en las probabilidades de las monedas, el juego B puede representar el movimiento de una partícula discreta en contacto con un baño térmico a temperatura T_1 y sometida a un potencial de periodo 3 con energías $V(0) = 0$, $V(1) = V$ y $V(2) = V/2$ como el de la figura 1.9. El juego A representaría el sistema en ausencia de potencial o, alternativamente, sometido al potencial pero en contacto con otro baño térmico de temperatura muy alta T_2 . Poniendo la partícula en contacto con ambos baños de forma alterna, $T_1 T_1 T_2 T_2 \dots$ por ejemplo, la partícula es capaz de moverse hacia la derecha incluso en contra de una fuerza externa (que desempeña el papel de ϵ), realizando trabajo. Otra posibilidad es asociar al juego B un potencial a través de una ecuación maestra (Torral *et al.*, 2003). En ambas interpretaciones, el juego B corresponde a un caminante aleatorio asimétrico bajo inversión espacial y capaz de rectificar las fluctuaciones del juego A.

1.3.2 Análisis. Reorganización de tendencias

Además de la explicación cualitativa basada en el efecto ratchet, la paradoja se puede explicar considerando otro mecanismo interesante. El juego B usa dos

monedas, una mala que se lanza cuando el capital es múltiplo de 3, y otra buena que se utiliza en caso contrario. La ganancia promedio del juego B depende por tanto de la frecuencia con que se utilice la moneda mala o, dicho de otro modo, de la probabilidad π_0 de que $X(t)$ sea un múltiplo de 3. Quizás uno esperaría que, dado que hay una posición mala de cada tres, esta probabilidad fuera $1/3$. Sin embargo, es mayor, lo que se puede deducir de la figura 1.8. Cuando el capital está en un sitio blanco, el movimiento más probable es hacia la derecha, mientras que si se encuentra en un sitio oscuro, lo será hacia la izquierda. Así, el capital pasa mucho más tiempo saltando hacia delante y hacia atrás entre un múltiplo de tres y su vecino de la izquierda del que lo haría si el movimiento fuera completamente aleatorio. En consecuencia, π_0 será algo mayor que $1/3$.

Por otra parte, en el juego A el movimiento del capital sí es prácticamente aleatorio, de forma que cuando se juega A durante algunos turnos, la probabilidad π_0 va pareciéndose cada vez más a $1/3$. Es decir, jugar a A reduce la probabilidad de que al jugar a B de nuevo haya que utilizar la moneda mala. A pesar de ser perdedor, el juego A refuerza el efecto de la moneda buena presente en B, proporcionando al juego global una tendencia ganadora. Llamamos a este mecanismo *reorganización de tendencias*, ya que el juego A refuerza la tendencia ganadora previamente existente en B (Parrondo y Dinis, 2004; Parrondo *et al.*, 2004).

Puesto que utilizaremos con frecuencia este mecanismo para analizar las sucesivas modificaciones de los juegos originales, resulta conveniente analizarlo de forma más detallada y cuantitativa. Como se deduce de la discusión anterior, la magnitud clave es $\pi_0(t)$, esto es, la probabilidad de que el capital sea un múltiplo de tres en el turno t . En efecto, si consideramos el juego B, la probabilidad de que el jugador gane en el turno t se expresa como

$$p_{\text{winB}} = \pi_0(t)p_m + (1 - \pi_0(t))p_b. \quad (1.91)$$

Una vez obtenida la probabilidad de ganar, podemos calcular la ganancia media en el turno t sustituyendo p_{win} por p_{winB} en la expresión (1.90).

El valor de $\pi_0(t)$ puede calcularse mediante técnicas de la teoría de *cadena de Markov*. Como las reglas del juego B son periódicas, en realidad basta con conocer el estado $Y(t)$ definido como

$$Y(t) \equiv X(t) \bmod 3, \quad (1.92)$$

para describir la evolución temporal del sistema. $Y(t)$ es un proceso estocástico que puede tomar tres únicos valores posibles: 0 si el capital es múltiplo de 3, 1 si es un múltiplo de 3 más 1 y 2 si es múltiplo de 3 más 2. Nótese que con esta definición, $\pi_0(t)$ es la probabilidad de que $Y(t) = 0$. Podemos definir análogamente las probabilidades $\pi_1(t)$ y $\pi_2(t)$ como la probabilidad de que $Y(t) = 1$ o $Y(t) = 2$ respectivamente.

$Y(t)$ posee una propiedad que será especialmente útil: es un proceso de Markov discreto en el tiempo y en su variable, lo que se suele denominar *cadena de Markov*. Debido a ello, basta conocer el estado $Y(t)$ para determinar con qué probabilidad encontraremos cada uno de los tres estados posibles en $t + 1$,

lo que nos permitirá escribir una ecuación *maestra* para la evolución de las probabilidades $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ y $\pi_2(t)$. A partir de las reglas del juego B podemos calcular la probabilidad p_{ij} de transición entre el estado j y el estado i , que resultan, en notación matricial $\Pi_B(ij) = p_{ij}$,

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 - p_b & p_b \\ p_m & 0 & 1 - p_m \\ 1 - p_m & p_b & 0 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

Al estado i se puede llegar en $t + 1$ desde cualquiera de los otros estados j en t con probabilidad dada por la probabilidad de transición p_{ij} , de modo que la probabilidad $\pi_i(t + 1)$ viene dada por la unión de todos esos sucesos (disjuntos), es decir la suma

$$\pi_i(t + 1) = \sum_{j=0}^2 p_{ij} \pi_j(t). \quad (1.94)$$

Utilizando el vector de probabilidad $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$, la ecuación de evolución (1.94) se escribe

$$\pi(t + 1) = \Pi_B \pi(t). \quad (1.95)$$

La matriz Π_B , tiene algunas propiedades interesantes que nos permitirán calcular de forma sencilla la solución estacionaria de $\pi(t)$, que denotaremos π_B^{st} . En particular, puesto que los elementos de matriz son probabilidades, cumplen $0 \leq p_{ij} \leq 1$ y, dado que al estado i se llega seguro desde alguno de los estados j , tenemos

$$\sum_{j=0}^2 p_{ij} = 1, \quad (1.96)$$

de modo que cada columna de la matriz suma 1. Las matrices con estas propiedades reciben el nombre de *matrices estocásticas* (Taylor y Karlin, 1984). Gracias a estas dos propiedades se puede demostrar (ver apéndice E) que 1 es autovalor de la matriz Π_B y que los autovalores distintos de 1 son menores que 1 en valor absoluto. Además, si la matriz es diagonalizable y solo tiene un autovector de autovalor 1 (como ocurre con la matriz Π_B), entonces necesariamente $\pi(t)$ converge hacia el autovector de autovalor 1 en el límite de $t \rightarrow \infty$, independientemente de la condición inicial $\pi(0)$ (también demostrado en el apéndice E). De este modo, la solución estacionaria viene dada por

$$\pi_B^{\text{st}} = \Pi_B \pi_B^{\text{st}}. \quad (1.97)$$

La solución a la ecuación (1.97) siempre existe, como hemos visto, aunque en principio podría existir más de una solución, o podría ocurrir que no todas las condiciones iniciales tendieran a la solución de (1.97) al evolucionar según (1.95). Sin embargo, existen teoremas que permiten establecer que, bajo ciertas condiciones menos restrictivas para la matriz estocástica, la distribución estacionaria de (1.95) es única, y cualquier condición inicial $\pi(0)$ tiende a la solución

estacionaria bajo la evolución dada por (1.95). Una condición suficiente se puede encontrar también en el apéndice E, aunque sin demostración. Para el caso particular de matrices 3×3 , es suficiente que cada columna de la matriz tenga al menos dos componentes distintas de cero.

La solución a la ecuación (1.97) para el juego B con $\epsilon = 0$ es,

$$\pi_B^{\text{st}} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ 6/13 \\ 2/13 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

convenientemente normalizada de modo que $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ y pueda representar una distribución de probabilidad. Para $\epsilon > 0$, desarrollando mediante Taylor hasta primer orden para simplificar la exposición, la primera componente de la solución estacionaria es

$$\pi_0^{\text{st}} = \frac{5}{13} - \frac{440}{2197}\epsilon + O(\epsilon^2) \simeq 0.38 - 0.20\epsilon. \quad (1.99)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.91), la probabilidad de ganar al jugar a B durante un número suficiente de turnos es

$$p_{\text{winB}} = \frac{1}{2} - \frac{147}{169}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (1.100)$$

que es menor que $1/2$ si $\epsilon > 0$, lo que prueba que B es un juego justo si $\epsilon = 0$ y perdedor si $\epsilon > 0$, como se muestra en la figura 1.7 para $\epsilon = 0.005$.

El juego A puede analizarse con las mismas técnicas. La matriz de transición se escribe

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 - p_A & p_A \\ p_A & 0 & 1 - p_A \\ 1 - p_A & p_A & 0 \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

y la distribución estacionaria para el juego A está dada por

$$\pi_A^{\text{st}} = \Pi_A \pi_A^{\text{st}}. \quad (1.102)$$

Alternativamente, uno puede darse cuenta de que las probabilidades de transición en el juego A no dependen del estado del capital $Y(t)$ y, en consecuencia, la solución estacionaria debe ser uniforme, esto es, $\pi_0^{\text{st}} = \pi_1^{\text{st}} = \pi_2^{\text{st}} = 1/3$. Es decir, jugar A acerca $\pi_0(t)$ hacia $1/3$ y, como $1/3$ es menor que $5/13$, el efecto de A es efectivamente reducir la probabilidad de que el jugador se encuentre en la moneda mala cuando vuelva a jugar B.

Por ejemplo, la combinación aleatoria de ambos juegos, en la que elegimos con probabilidad $1/2$ que juego se juega en t , se describe mediante la ecuación de evolución

$$\pi(t+1) = \frac{1}{2}[\Pi_A + \Pi_B]\pi(t), \quad (1.103)$$

puesto que en cada turno la probabilidad de ganar en el estado $Y(t)$ se calcula como la probabilidad de jugar A ($1/2$) multiplicada por la probabilidad de ganar

en A (p_A) más la probabilidad de jugar B ($1/2$) por la probabilidad de ganar jugando B (p_m o p_b según corresponda al estado). Con la ecuación de evolución (1.103), la probabilidad estacionaria cumple

$$\pi_{A+B}^{\text{st}} = \frac{1}{2}[\Pi_A + \Pi_B]\pi_{AB}^{\text{st}}, \quad (1.104)$$

resultando una probabilidad de utilizar la moneda mala en el juego B de

$$\pi_{0A+B}^{\text{st}} = \frac{245}{709} - \frac{48880}{502618}\epsilon + O(\epsilon^2) \simeq 0.35 - 0.10\epsilon. \quad (1.105)$$

La probabilidad de ganar en la combinación aleatoria es, en el régimen estacionario,

$$p_{A+B} = \frac{1}{2}p_A + \frac{1}{2}[\pi_{0AB}^{\text{st}}p_m + (1 - \pi_{0A+B}^{\text{st}})p_b]. \quad (1.106)$$

Desarrollando hasta primer orden ϵ vale

$$p_{A+B} = \frac{727}{1418} - \frac{486795}{502681}\epsilon + O(\epsilon^2) \simeq 0.513 - 0.968\epsilon, \quad (1.107)$$

que es mayor que $1/2$ para ϵ suficientemente pequeño. Esta es la esencia de la paradoja: el juego A, a pesar de consistir en una moneda mala, redistribuye las frecuencias con que se juegan las dos monedas del juego B, potenciando la moneda buena lo suficiente como para invertir la tendencia perdedora de ambos juegos.

Aplicando técnicas similares se puede obtener la probabilidad de ganar estacionaria y la ganancia promedio en estado estacionario para secuencias periódicas de los juegos, tales como ABBABB... , o AABBAABB... , etcétera.

Por ejemplo, consideremos la secuencia periódica ABB. En los turnos múltiplos de tres (el periodo de ABB) $t = 3n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, se juega A. La ecuación de evolución para ese turno será

$$\pi(3n+1) = \Pi_A \pi(3n). \quad (1.108)$$

Sin embargo, en los dos siguientes turnos, se juega B, por lo que las ecuaciones de evolución son

$$\pi(3n+2) = \Pi_B \pi(3n+1) = \Pi_B \Pi_A \pi(3n) \quad (1.109)$$

y

$$\pi(3n+3) = \pi(3(n+1)) = \Pi_B \pi(3n+2) = \Pi_B \Pi_B \Pi_A \pi(3n). \quad (1.110)$$

Si nos concentramos en $\pi(3n)$, estamos en una situación similar a las anteriores, excepto que el papel de la matriz estocástica ahora lo desempeña la matriz $\Pi_{ABB} = \Pi_B \Pi_B \Pi_A$. No obstante, las matrices producto de matrices estocásticas también lo son. Teniendo en cuenta que todas las componentes de las matrices estocásticas son mayores o iguales que cero, el producto de dos matrices cuyas columnas tienen al menos dos componentes no nulas, también tendrá columnas con al menos dos componentes no nulas.

Por tanto, $\pi(3n)$ alcanzará un estado estacionario dado por el autovector de autovalor uno de Π_{ABB} , que llamaremos π^{st0} . El comportamiento estacionario de $\pi(3n+1)$ y $\pi(3n+2)$ se obtiene, como indican las ecuaciones de evolución (1.108) y (1.109), aplicando Π_A y $\Pi_B\Pi_A$ a π^{st1} , respectivamente

$$\pi^{st1} = \Pi_A \pi^{st0} \quad (1.111)$$

y

$$\pi^{st2} = \Pi_B \Pi_A \pi^{st1}. \quad (1.112)$$

Como π^{st0} es autovector de autovalor 1 de Π_{ABB} , al aplicar Π_B sobre π^{st2} obtenemos π^{st0} de nuevo. De esta manera, la distribución no alcanza nunca un estado estacionario estrictamente hablando, si no que realiza un ciclo entre los tres vectores.

Como consecuencia, la ganancia media es diferente en los turnos $3n$, $3n+1$ y $3n+2$, digamos g_0 , g_1 y g_2 , que se calculan a partir del correspondiente estado estacionario de forma similar a como lo hacíamos para un juego solo, A o B. La ganancia g_0 es la ganancia media producida por el juego A puesto que en el turno $3n$ siempre toca jugar a A, por lo que vale

$$g_0 = 2(p_{\text{winA}}) - 1 = 2p_A - 1. \quad (1.113)$$

La ganancia g_1 es la ganancia correspondiente a jugar B cuando la distribución de probabilidad vale π^{st1} , y se calcula por tanto en función del valor de su primera componente π_0^{st1} como

$$g_1 = 2p_{\text{winB}}(\pi_0^{st1}) - 1 = 2(\pi_0^{st1}p_m + (1 - \pi_0^{st1})p_b) - 1 \quad (1.114)$$

y análogamente para g_2 tenemos

$$g_2 = 2p_{\text{winB}}(\pi_0^{st2}) - 1 = 2(\pi_0^{st2}p_m + (1 - \pi_0^{st2})p_b) - 1 \quad (1.115)$$

La ganancia media a lo largo de tres turnos es siempre la misma una vez en estado estacionario y viene dada por la suma de las tres ganancias posibles $g_0 + g_1 + g_2$. La pendiente media del capital en la gráfica 1.7 para la secuencia ABB corresponde entonces al promedio de ganancia en cada uno de los tres turnos:

$$g_{ABB} = \frac{1}{3}(g_0 + g_1 + g_2). \quad (1.116)$$

1.4 Estructura y objetivos de la tesis

Una vez establecidas las principales características de la flashing ratchet y de los juegos paradójicos, centraremos ahora la atención en las cuestiones a las que queremos dar respuesta en este trabajo. Los resultados obtenidos se estructuran en distintos capítulos cuyo contenido se resume en esta última parte de la introducción.

1.4.1 Estrategias en los juegos

En los juegos paradójicos originales, la secuencia con la que se juega A o B está predeterminada de antemano. Pero, ¿qué ocurre si permitimos que sea el propio jugador quien elija a cuál prefiere jugar? ¿Cuál sería la mejor manera de escoger el juego? En el caso de un solo jugador, la respuesta es sencilla. La estrategia que produce mayor ganancia promedio consiste en escoger el juego A cuando el capital es múltiplo de 3 y el B en cualquier otro caso. (Véase (Cleuren y Van den Broeck, 2004) para una demostración rigurosa. Nótese sin embargo que de esta forma nunca se utiliza la moneda mala del juego B). Esta estrategia maximiza el promedio de las posibles ganancias en cada turno, por lo que habitualmente se denomina estrategia avariciosa. Sin embargo, al considerar juegos *colectivos*, donde varios jugadores han de elegir conjuntamente si van a jugar a A o B en cada turno, aparecen nuevos fenómenos más complejos e interesantes. La diferencia esencial con respecto a un solo jugador, es que frecuentemente la decisión que beneficia a algunos jugadores resulta poco adecuada o incluso perjudicial para otros jugadores que se encuentran en un estado diferente. Podríamos denominar esta propiedad como *frustración*, por analogía con lo que ocurre en vidrios de spin en los que el desorden de interacciones ferro- y anti-ferromagnéticas hace imposible minimizar la energía de todos los enlaces a un mismo tiempo; en el modelo de Ising puramente antiferromagnéticos pero en una red triangular, donde es imposible “anti-alinear” todos los spines a la vez; o en el plegamiento de proteínas, donde las interacciones entre los aminoácidos son realmente variadas, por citar algunos ejemplos de sistemas frustrados. En los sistemas frustrados, es habitual encontrar paisajes de energía muy complejos, en los que la fenomenología es muy rica y donde encontrar el estado de energía más bajo es una tarea realmente complicada.

Análogamente, la frustración en los juegos paradójicos hace difícil encontrar la estrategia que produce las mayores ganancias. Estrategias sencillas de maximización de la ganancia, basadas en criterios a corto plazo, pueden resultar al final inadecuadas, como se muestra en el capítulo 2 mediante dos ejemplos. En uno de ellos, los individuos eligen el juego por votación, adoptándose el juego que prefiere la mayoría. En el otro, se elige en cada turno el juego que proporciona la mayor ganancia. Tanto uno como otro muestran que, en ocasiones, tomar una decisión que sacrifica beneficios a corto plazo puede resultar más acertado a largo plazo. El mecanismo responsable no es exclusivo de los sistemas fluctuantes, pudiéndose diseñar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en los que aparecen fenómenos similares. El capítulo concluye estudiando el efecto del número de jugadores en el sistema, mostrando que los malos resultados de la estrategia de votación y avariciosa son fenómenos puramente colectivos que desaparecen en sistemas con pocos jugadores.

El capítulo 3 aborda directamente el problema de la determinación de la estrategia óptima en los juegos colectivos con un número infinito de jugadores como un problema de optimización sujeto a las restricciones impuestas por la propia evolución dinámica del sistema. La solución a este problema permite además responder a una cuestión cuya respuesta se conocía tan solo parcialmen-

te hasta ahora: ¿cuál es la secuencia periódica que proporciona mayor ganancia promedio (en estado estacionario) en los juegos de Parrondo originales?. Cálculos analíticos han demostrado que la secuencia $ABABB \dots$ es la que proporciona mayores ganancias promedio en el estado estacionario de entre todas las secuencias periódicas posibles de periodo menor o igual que 12 (Vellerman y Wagon, 2000). En este capítulo presentamos fuertes evidencias numéricas que indican que efectivamente la secuencia periódica $ABABB \dots$ es la que proporciona mejores resultados a largo plazo de entre todas las posibles.

Cleuren y Van den Broeck (2004) han encontrado que la estrategia avariciosa es la mejor estrategia para 1 ó 2 jugadores, pero que no es el caso para 3 y que tampoco lo es en el límite de infinitos jugadores. Encontrar la estrategia óptima en los juegos colectivos de forma analítica resulta complicado incluso para 4 o más jugadores y se ha sugerido que es un problema NP-Completo (Behrends, 2004a). En el capítulo 4 desarrollamos una variación del método del capítulo 3 que se puede utilizar para encontrar la solución de forma numérica para cualquier número de jugadores desde 1 hasta 100 (como mínimo).

La introducción de las estrategias en los juegos paradójicos los conecta con la *teoría de juegos*, en la que el análisis de las posibles estrategias resulta también crucial. John Von Neumann y Oskar Morgenstern (1944) iniciaron este nuevo campo que desde entonces ha encontrado aplicaciones no sólo en matemáticas y economía donde se originó, sino que ha sido empleado en ciencias políticas y sociales, filosofía y psicología (Colman, 1995), biología y etología (Colman, 1995; Dugatkin y Reeve, 2000; Axelrod, 1984), publicidad, carrera armamentística y negociaciones salariales habitualmente como aplicaciones o ejemplos del dilema del prisionero, análisis del tráfico urbano (Levinson, 2005) y en general, problemas que requieran la búsqueda de una estrategia orientada a la optimización de beneficios u utilidades para los individuos que compiten por unos recursos limitados. De la teoría de juegos destacamos dos que han recibido considerable atención, el *juego de la minoría* en el que los participantes votan entre dos alternativas con la intención de pertenecer a la minoría (Challet y Zhang, 1997; Challet, 2005), y el *dilema del prisionero* o el *dilema del prisionero iterado* (Axelrod, 1984), en el que los jugadores han de decidir si cooperan o no entre ellos. Tratando de responder a la pregunta de qué debería hacer un jugador para ganar lo más posible en este tipo de juegos, Axelrod convocó dos competiciones (Axelrod, 1980a; Axelrod, 1980b) invitando a que los matemáticos de la teoría de juegos enviaran sus estrategias diseñadas con el objeto de maximizar la ganancia del jugador y las hizo competir en parejas en 200 juegos. Los resultados se recogen en su libro (Axelrod, 1984).

En lo que se refiere a los juegos paradójicos, la utilidad del estudio de las estrategias de optimización de la ganancia en los juegos es triple. Por un lado, puede resultar interesante para la teoría de control (estocástico) y optimización de sistemas dinámicos o teoría de la toma de decisiones en sistemas aleatorios. La optimización de una determinada cantidad en presencia de restricciones o de varios requerimientos en conflicto (de la que la búsqueda del mínimo de energía en sistemas frustrados es un caso particular), ha sido objeto de estudio por parte de la teoría de control óptimo que se ha aplicado con excelentes

resultados en disciplinas como la física, química e ingeniería, pero también en economía, ciencias sociales, medicina o biología (Layton, 1976; Lewis y Syrmos, 1995). Nuestros sistemas basados en juegos constituyen modelos sencillos pero con los ingredientes necesarios para analizar estas cuestiones. Por ejemplo, muestran como algunos tipos de optimización razonables en principio pueden resultar peores que estrategias periódicas o aleatorias. Por otro lado, el tipo de *regla de la mayoría* que se utiliza en la versión de los juegos en la que permitimos a los individuos elegir el juego mediante votación es relevante en diversas situaciones como la construcción de modelos sobre la opinión pública (Galam, 2003; Kaprivski y Redner, 2003) o el diseño de redes neuronales multi-capas mediante “committee machines” (Barkai *et al.*, 1992; Van den Broeck y Parrondo, 1993).

Por último, dada la relación existente entre los juegos paradójicos y la flashing ratchet, algunos de los fenómenos estudiados y de las conclusiones obtenidas para los juegos pueden resultar extrapolables a sistemas físicos reales basados en motores brownianos en los que se desee implementar protocolos de control. En el contexto de los motores brownianos, la cuestión de la maximización del capital en los juegos colectivos corresponde a una colección de partículas brownianas independientes pero sometidas a un potencial común que puede ser conectado o desconectado dependiendo de la posición de las partículas, con el objetivo de maximizar el transporte en una cierta dirección. Este es precisamente el objeto del capítulo 5, que se dedica al control en la “flashing ratchet”.

1.4.2 Control en motores brownianos colectivos

Como hemos visto, en la flashing ratchet la rectificación de las fluctuaciones se consigue por medio de la aplicación de una perturbación aleatoria o periódica a un sistema en equilibrio pero con alguna asimetría subyacente, como ocurre de hecho en la mayor parte de los motores brownianos (Reimann, 2002; Linke, 2002).

Sin embargo, ha surgido recientemente cierto interés por introducir el control en los motores brownianos, lo que puede resultar relevante para las aplicaciones antes mencionadas. Por ejemplo, la mayor parte de los motores de proteínas probablemente operen como sistemas de control (Kitano, 2001). Tarlie y Astumian estudiaron en (1998) el efecto de una modulación controlable del potencial de dientes de sierra y encontraron la modulación que maximiza el flujo de partículas. Para sistemas en los que los parámetros o el estado del potencial no son fácilmente modificables, como por ejemplo la mayor parte de las ratchets bidimensionales en las que las partículas interactúan con un sustrato asimétrico, se han propuesto otras formas de controlar el flujo de partículas. Ejemplos de este tipo de dispositivos son los rectificadores de cuantos magnéticos de flujo (vórtices) en superconductores (Villegas *et al.*, 2003) o canales de iones sintéticos (Siwy, 2002). Según Savel’ev y colaboradores, el flujo de partículas se puede controlar en este tipo de ratchets añadiendo otra especie de partículas que interacciones con las iniciales (Savel’ev *et al.*, 2003). Otra posibilidad es la aplicación de señales simultáneas que son capaces de controlar el transporte de partículas

por efecto ratchet en ferrofluidos, dislocaciones en sólidos, bombeo de electrones en “dots” cuánticos o coloides sometidos a pinzas ópticas dispuestas regularmente (Savel’ev *et al.*, 2004).

No obstante, todas estas estrategias de control tienen la propiedad común de ser, utilizando la terminología habitual en sistemas de control, protocolos de control de *bucle abierto*, esto es, están prediseñadas y no utilizan ningún tipo de información sobre el estado del sistema. Por el contrario, en el capítulo 5 estudiamos el efecto sobre el transporte de partículas de un tipo de control de bucle cerrado o retroalimentado, una modulación del potencial de dientes de sierra que depende del estado instantáneo del sistema. Este tipo de control puede implementarse por ejemplo en sistemas en los que las partículas son monitorizadas como ocurre en algunos sistemas experimentales de partículas coloidales (Rousselet *et al.*, 1994; Marquet *et al.*, 2002; Linke, 2005).

El sistema que nosotros estudiamos, y que fue introducido en (Cao *et al.*, 2004), consiste en un conjunto de partículas brownianas sometidas a un potencial de dientes de sierra que puede conectarse o desconectarse dependiendo de la posición de las partículas, con el objetivo de obtener la máxima corriente posible. Comenzamos analizando con detalle un protocolo que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas del conjunto de partículas. Este protocolo resulta óptimo para una partícula y mejor que cualquier conexión periódica en conjuntos de tamaño moderado. En cambio, para conjuntos con un gran número de partículas los protocolos periódicos e incluso aleatorios producen un mayor transporte que el control basado en la maximización de la velocidad instantánea. De hecho, veremos que para este último, la corriente de partículas se anula en el límite de número infinito de partículas, a pesar de que la conexión del potencial se realiza de modo que la velocidad del centro de masas es máxima en cada instante.

Tras analizar el mecanismo responsable de este comportamiento paradójico del protocolo de control, que como veremos está relacionado con el mecanismo presente en los juegos paradójicos colectivos que puede volver la estrategia avariciosa perdedora, proponemos una modificación del protocolo capaz de evitar su aparición (Dinis *et al.*, 2005a). El protocolo modificado permite la desconexión del potencial en ciertos instantes a costa de perder velocidad instantánea, y la conexión incluso aunque ello produzca un retroceso inicial del centro de masas. No obstante, este protocolo es capaz de batir al protocolo de maximización de la velocidad instantánea para conjuntos grandes de partículas, produciendo un resultado similar al protocolo periódico en el límite infinito de número de partículas, a la vez que mantiene un comportamiento casi tan bueno como el primero para conjuntos de tamaño medio o pequeño. Finalizamos el capítulo 5 proporcionando una explicación lo más sencilla posible de este efecto.

Por último, el capítulo 6 se dedica a resumir los resultados más relevantes de la tesis, establecer las consecuencias que se desprenden de ellos, algunas cuestiones relacionadas aún sin resolver así como las líneas futuras de investigación.

[2]

Toma de decisiones colectiva: estrategias avariciosas frente a estrategias ciegas

En la primera parte de este capítulo consideraremos la denominada estrategia *avariciosa* que consiste en elegir en cada turno el juego que proporcionará el mayor beneficio en promedio (Cleuren y Van den Broeck, 2004). En la segunda parte, centraremos nuestro análisis en la estrategia de la votación, que propone dejar que cada jugador vote al juego que más le conviene jugar y seleccionar aquél que reciba mayor número de votos (Dinis y Parrondo, 2004). Como referencia, ambas estrategias serán comparadas con dos diferentes estrategias “ciegas”, en el sentido de que éstas últimas no utilizan ningún tipo de información sobre el estado del sistema, esto es, el capital de cada jugador. En la estrategia *periódica* el juego se selecciona siguiendo una secuencia previamente determinada, por ejemplo ABBABB... Por otra parte, la estrategia *aleatoria* propone escoger el juego A o B aleatoriamente en cada turno, con igual probabilidad para ambos.

2.1 La optimización a corto plazo o cómo la estrategia avariciosa resulta peor que las estrategias ciegas.

Este primer modelo está formado por un número N suficientemente grande de individuos que han de jugar contra el casino siguiendo las reglas de los dos juegos paradójicos originales, A y B. En cada turno, tan sólo se permite jugar a una fracción γ de los individuos escogidos aleatoriamente en cada turno de entre todos los jugadores¹. Los jugadores escogidos han de tomar una decisión

¹Realizar esta modificación es equivalente a cambiar las reglas de los juegos de forma que se permita que cada jugador pueda permanecer con su mismo capital con probabilidad $1 - \gamma$, y ganar con probabilidad γp_A en el juego A y con probabilidades γp_b o γp_m al utilizar respectivamente la moneda buena o mala en el juego B. Por último, las probabilidades de

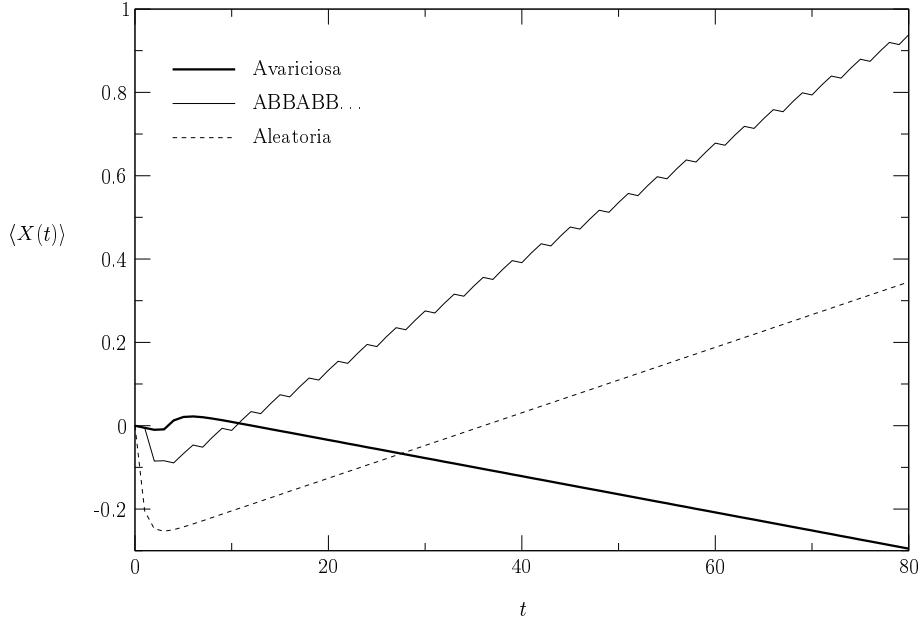


Figura 2.1: Evolución del capital promedio para $\gamma = 0.5$ y $\epsilon = 0.005$. Cálculo analítico para número infinito de jugadores.

colectiva sobre el juego, A o B, en el que participarán todos los pertenecientes al subconjunto seleccionado. Los jugadores pueden basar su decisión en el conocimiento detallado del capital de cada uno de ellos, que por supuesto condicionará el promedio de las ganancias obtenidas ya que las reglas del juego B dependen del capital (Dinis y Parrondo, 2003).

La figura 2.1 muestra el cálculo analítico del capital promedio para la estrategia avariciosa y las ciegas. La estrategia avariciosa resulta perdedora a largo plazo, mientras que el capital crece con el número de turnos para ambas estrategias ciegas.

2.1.1 Análisis para $N \rightarrow \infty$

Un análisis detallado del modelo ayudará a revelar el mecanismo subyacente que provoca este inesperado fenómeno. Al igual que en los juegos originales con un solo jugador, podemos representar la evolución del sistema colectivo mediante una cadena de Markov de tres estados (ver sección 1.3.2). La ley de los grandes números nos asegura que si definimos las tres componentes del vector $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ como la fracción de jugadores cuyo capital módulo 3 es igual a 0, 1 ó 2, respectivamente, entonces el vector $\pi(t)$ evoluciona

perder serían $\gamma(1 - p_A)$ en el juego A y $\gamma(1 - p_b)$ o $\gamma(1 - p_m)$, según la moneda utilizada en B.

con el tiempo siguiendo las mismas ecuaciones que el vector de densidades de probabilidad en los juegos originales. Es decir, si elegimos el juego B en el turno t , las fracciones de jugadores en cada estado para el turno siguiente vendrán dadas por

$$\pi(t+1) = \Pi_B \pi(t) \quad (2.1)$$

donde Π_B es la misma matriz estocástica definida en la sección 1.3.2 para el juego B. Análogamente tendremos la matriz Π_A para el juego A. Ahora bien, como en la versión de los juegos que nos ocupa en esta sección se establece que tan solo una fracción γ del total de jugadores entra en juego en cada turno y el resto de jugadores, $(1 - \gamma)$, mantiene su capital, entonces la ecuación correcta de evolución para el sistema se escribe²

$$\pi(t+1) = (1 - \gamma)\pi(t) + \gamma\Pi(t)\pi(t) \quad (2.2)$$

donde $\Pi(t) = \Pi_A$ si escogemos el juego A en el turno t , o bien $\Pi(t) = \Pi_B$ si el B. Definiendo la matriz

$$\Pi_\gamma(t) = (1 - \gamma)I + \gamma\Pi(t), \text{ con } I \text{ la matriz identidad } 3 \times 3, \quad (2.3)$$

la ecuación de evolución se escribe

$$\pi(t+1) = \Pi_\gamma(t)\pi(t) \quad (2.4)$$

de modo que la matriz $\Pi_\gamma(t)$ es la matriz de las probabilidades de transición de la cadena de Markov.

La ecuación (2.4) permite analizar el efecto de los juegos A y B por separado, las estrategias ciegas y de la estrategia avariciosa. Para estudiar los juegos A y B por separado así como las estrategias ciegas, podemos basarnos en el análisis realizado para los juegos originales si tenemos en cuenta la siguiente propiedad:

- Si π^{st} es autovector con autovalor 1 de una matriz Π independiente de t , entonces también lo es de la matriz definida como $\Pi_\gamma = (1 - \gamma)I + \gamma\Pi$.

En efecto, aplicando Π_γ sobre π^{st} :

$$\Pi_\gamma \pi^{st} = [(1 - \gamma)I + \gamma\Pi]\pi^{st} = (1 - \gamma)\pi^{st} + \gamma\pi^{st} = \pi^{st}. \quad (2.5)$$

De modo que si la matriz Π representa por ejemplo el juego A, entonces la cadena de Markov correspondiente definida por Π_γ tendrá la misma distribución estacionaria $\pi^{st} = (1/3, 1/3, 1/3)$ que encontrábamos para el juego A original. Lo mismo ocurre para el juego B, la combinación aleatoria o cualquier combinación periódica: el factor γ no modifica las distribuciones estacionarias, solo hace que la

²Análogamente podemos considerar las reglas modificadas en las que la probabilidad de mantener el capital en un turno es $(1 - \gamma)$ y deducir los elementos de la matriz que define la cadena de Markov a partir de las nuevas reglas. El lector puede comprobar que el resultado es una matriz $\Pi_{\text{nueva}} = (1 - \gamma)I + \gamma\Pi_A$ para el juego A y $\Pi_{\text{nueva}} = (1 - \gamma)I + \gamma\Pi_B$ para el juego B, donde I es la identidad 3×3 y Π_A y Π_B son las matrices correspondientes a los juegos A y B originales, exactamente igual que en el texto.

distribución $\pi(t)$ necesite un mayor número de turnos para alcanzarlo. A partir de las distribuciones estacionarias podemos calcular las probabilidades de ganar en estado estacionario y la ganancia media en un turno t , cuya expresión se ve modificada para tener en cuenta que solo una fracción γ juegan en cada turno. Por ejemplo, si p_{winB} es la probabilidad de ganar en el juego B original, es decir $p_{\text{winB}} = \pi_0^{st} p_m + (1 - \pi_0^{st}) p_b$, la ganancia media en el juego B colectivo será

$$\begin{aligned} \langle X(t+1) - X(t) \rangle &= (+1)\gamma [\pi_0^{st} p_m + (1 - \pi_0^{st}) p_b] \\ &\quad + (-1)\gamma [\pi_0^{st}(1 - p_m) + (1 - \pi_0^{st})(1 - p_b)] + 0(1 - \gamma) = \\ &= \gamma(2p_{\text{winB}} - 1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

y análogamente para el juego A y el resto de estrategias ciegas. Puesto que $\gamma > 0$, la ecuación (2.6) nos asegura que γ no modifica el carácter ganador o perdedor de los juegos A o B por separado ni de las estrategias aleatoria o periódica.

El comportamiento del sistema bajo la estrategia avariciosa puede entenderse fijándose tan solo en la primera componente del vector $\pi(t)$, esto es, en la fracción $\pi_0(t)$ de jugadores cuyo capital es múltiplo de tres. Así, la fracción de jugadores que gana en promedio en cada turno según el juego será:

$$\begin{aligned} \gamma p_{\text{winA}} &= \gamma p_A, \\ \gamma p_{\text{winB}} &= \gamma [\pi_0 p_m + (1 - \pi_0) p_b] \end{aligned} \tag{2.7}$$

La estrategia avariciosa elige en cada turno el juego que más ganancias proporciona. Comparando p_{winA} con p_{winB} , obtenemos el valor crítico para π_0 que hace iguales ambas probabilidades y que llamamos π_{0c}

$$\gamma p_{\text{winA}} = \gamma p_{\text{winB}} \Rightarrow p_A = \pi_{0c} p_m + (1 - \pi_{0c}) p_b \tag{2.8}$$

de donde

$$\pi_{0c} = \frac{(p_A - p_b)}{(p_m - p_b)} = \frac{1/2 - \epsilon - 3/4 + \epsilon}{1/10 - \epsilon - 3/4 + \epsilon} = 5/13, \tag{2.9}$$

independiente del valor de ϵ .

Si π_0 supera el valor π_{0c} , la probabilidad de ganar en A es mayor que en B y si π_0 está por debajo de π_{0c} entonces es el B el juego con mayor probabilidad de ganar. De esta manera, la estrategia avariciosa se puede expresar en función de π_{0c} como

$$\begin{aligned} \text{jugar A} &\quad \text{si} \quad \pi_0(t) \geq \pi_{0c} \\ \text{jugar B} &\quad \text{si} \quad \pi_0(t) < \pi_{0c} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Veamos ahora cómo se modifica π_0 con cada uno de los juegos. Empezaremos el análisis para $\epsilon = 0$ para más tarde comentar el efecto de $\epsilon > 0$.

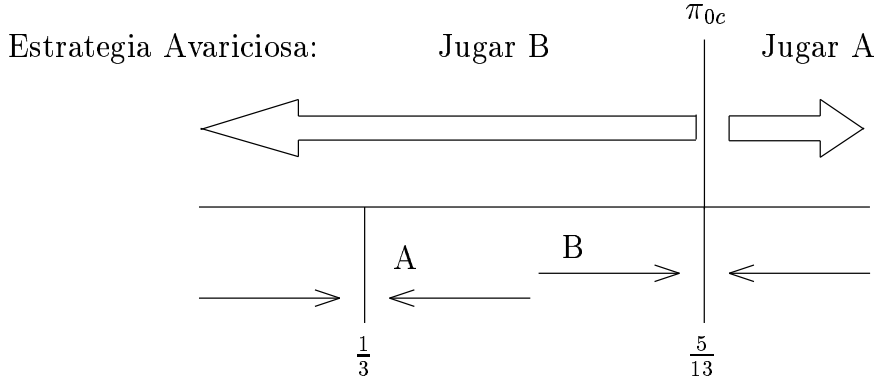


Figura 2.2: Representación esquemática de la evolución de $\pi_0(t)$ bajo la acción del juego A o B (abajo). En la parte superior se representa la prescripción indicada por la estrategia avariciosa.

Como acabamos de ver, el factor γ no modifica los estados estacionarios, de modo que si jugamos a A repetidamente, la distribución $\pi(t)$ tiende a una distribución homogénea y $\pi_0(t)$ tiende a $1/3$. Si jugamos a B repetidamente, π_0 tiende a $5/13$ (ver sección 1.3.2), que es justamente el valor crítico π_{0c} que determina el cambio de juego para la estrategia avariciosa³.

La figura 2.2 representa esquemáticamente la evolución de $\pi_0(t)$ bajo la acción de cada juego así como la prescripción de la estrategia avariciosa expresada en (2.10).

Considérese una distribución inicial de capital entre los jugadores tal que $\pi_0(0) < \pi_{0c} = 5/13$. En caso contrario, la estrategia avariciosa elegirá el juego A, y se puede demostrar que cualquier punto perteneciente a $\pi_0 > 5/13$ se transforma bajo la acción de A en un punto con $\pi_0 < 5/13$ de modo que $\pi_0(1) < 5/13$. ¿Qué ocurre una vez que $\pi_0 < 5/13$? La estrategia avariciosa elige en tal caso el juego B, haciendo que π_0 crezca. Si el valor de π_0 en el siguiente turno es todavía menor que $5/13$ (y éste será el caso si γ es suficientemente pequeño), la estrategia avariciosa elegirá B de nuevo, y así una y otra vez mientras π_0 siga siendo menor que $5/13$. Vemos que, a pesar de que estas elecciones son las que proporcionan mayores ganancias en cada turno, tienen como consecuencia que π_0 se acerque más y más a $5/13$, es decir, hacia la región donde las ganancias van siendo cada vez menores para el juego B. Para $\gamma = 0.5$, la estrategia avariciosa elegirá B durante 40 turnos seguidos antes de cambiar al juego A. Esto hace que π_0 permanezca durante la mayor parte de las rondas cercano a $5/13$ (parte

³Precisamente el juego B es justo en estado estacionario cuando $\epsilon = 0$, de modo que el valor estacionario de π_0 tiene ser tal que $p_{\text{winB}} = 1/2 = p_A$ si $\epsilon = 0$, es decir, $\pi_0^{st}(\epsilon = 0) = \pi_{0c}$.

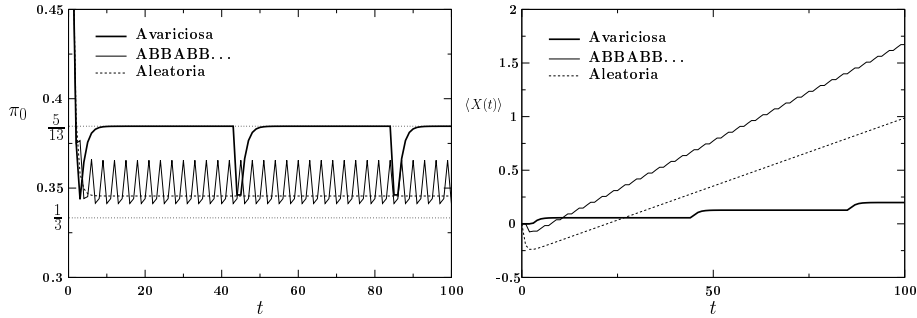


Figura 2.3: Evolución de π_0 (izquierda) y del capital promedio (derecha) para las estrategias consideradas en el texto. Cálculo analítico para $N = \infty$, $\gamma = 0.5$ y $\epsilon = 0$.

izquierda de la figura 2.3), por lo que el juego B resulta ganador pero con unas ganancias cercanas a 0, y el capital aproximadamente constante (parte derecha de la figura 2.3).

Por otra parte, las estrategias periódica y aleatoria eligen el juego A en ciertos turnos incluso si $\pi_0 < 5/13$. Esta elección no produce beneficios en ese turno, pero consigue mantener π_0 en valores bastante menores que π_{0c} , haciendo que el capital crezca más rápido. Las estrategias ciegas sacrifican así beneficios a corto plazo para conseguir mayores rendimientos a largo plazo.

Finalmente, la introducción de una pequeña perturbación $\epsilon > 0$ en las probabilidades de ganar de las monedas de los juegos tiene dos consecuencias principales. Por un lado, transforma los juegos A y B de justos en perdedores cuando se juegan por separado. Por otro, hace disminuir el valor estacionario de π_0 como se desprende de la expresión del valor estacionario para el juego B (1.99). Como hemos visto en (2.9), π_{0c} no depende de ϵ y por tanto π_0^{st} queda por debajo de π_{0c} para $\epsilon > 0$. Por esta razón, la estrategia avariciosa queda atrapada jugando B para siempre. Dado que B es un juego perdedor para $\epsilon > 0$, el capital promedio decrece entonces con el número de turnos, tal y como se ha mostrado ya en la figura 2.1

Resumiendo, el modelo estocástico analizado en esta sección es un ejemplo de cómo la optimización a corto plazo puede llevar a pérdidas sistemáticas en sistemas en los que estrategias ciegas triunfan. La explicación se basa en el hecho de que la estrategia avariciosa deja exhausto al sistema, “matando a la gallina de los huevos de oro”. Este mecanismo puede ser muy general. Aparece en otros muchos escenarios, por ejemplo, en el sistema dinámico que se muestra en la siguiente sección o en la versión democrática de los juegos paradójicos colectivos estudiada en la sección 2.3. Además, mecanismos similares se emplean en la explicación de fenómenos comunes en economía o ecología, aunque de forma más bien cualitativa. Los casos más representativos son el riesgo que suponen sobre la actividad económica los impuestos excesivos o la sobreexplotación de recursos naturales.

2.2 Un ejemplo determinista

En esta sección analizamos un sistema determinista y continuo en el tiempo con un comportamiento similar al descrito en la sección anterior para los juegos colectivos. El sistema está descrito por las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \alpha(t)x(t) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{1}{\tau}[x(t) - x_{fc}(1 - \alpha(t))]\end{aligned}\quad (2.11)$$

donde los únicos valores permitidos para $\alpha(t)$ son 0 ó 1. Estas ecuaciones modelan de forma sencilla un sistema o planta de producción cuya cantidad de producto acumulado hasta el tiempo t viene dado por $y(t)$, como por ejemplo una fábrica. Supongamos que nos permiten dirigir la fábrica desde un cierto instante de tiempo inicial $t = 0$ hasta T . Imaginemos que nuestro interés consiste en haber acumulado la mayor cantidad posible de producto en el momento T en el que hemos de abandonar la planta. Para ello, el único control que tenemos sobre la producción consiste en encender o apagar la planta en cualquier momento haciendo $\alpha(t) = 1$ o $\alpha(t) = 0$, respectivamente. La variable $x(t)$ representa la productividad de la planta en tiempo t , que decrece exponencialmente cuando la producción está en marcha y se recupera también de forma exponencial hasta la máxima capacidad de producción x_{fc} cuando la planta permanece desconectada. Para ambas relajaciones τ es el tiempo característico. Nuestro problema entonces es encontrar la política de encendido o apagado $\alpha(t)$ que maximice la producción total $y(T)$.

Cabe esperar que maximizar en todo momento el ritmo de producción $\dot{y}(t)$, es decir, tomar

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) < 0 \\ 1 & \text{si } x(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

constituye una buena política para obtener la máxima cantidad de producto total $y(T)$.

Sin embargo, dada la prescripción (2.12), la correspondiente solución del sistema de ecuaciones (2.11) nos muestra que, en el mejor de los casos, $y(t)$ alcanza un valor de saturación en el que la productividad es nula.

Supongamos que la productividad es inicialmente negativa $x(0) < 0$ y que siguiendo la condición (2.12) tomamos $\alpha = 0$. Esta elección de α hace crecer x hacia el valor positivo x_{fc} , ya que para $\alpha = 0$ tenemos

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}[x(t) - x_{fc}], \quad (2.13)$$

cuya solución es

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + x_{fc}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (2.14)$$

que tiende exponencialmente hacia x_{fc} cuando $t \rightarrow \infty$. No obstante, esta solución es solo válida mientras $x(t)$ sea negativo: en el momento que $x(t)$ alcanza el 0, la prescripción (2.12) cambia el valor de α situándolo en 1. Llamemos a ese instante t_c . A partir de entonces, la ecuación de evolución para $x(t)$ es

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t), \forall t > t_c \quad (2.15)$$

cuya solución es

$$x(t) = x(t_c)e^{-\frac{(t-t_c)}{\tau}} \quad (2.16)$$

que en el caso de $x(t_c) = 0$ se reduce a

$$x(t) = 0, \forall t > t_c. \quad (2.17)$$

La parte derecha de la figura 2.4 muestra la evolución de $x(t)$ para $x(0) = -1$, $\tau = 1$ y $x_{fc} = 1$. Una vez obtenida la solución de $x(t)$, la producción $y(t)$ se calcula

$$y(t) = y(0) + \int_0^t dt \alpha(t')x(t'). \quad (2.18)$$

Durante todo el intervalo $0 \leq t < t_c$, tenemos $\alpha = 0$, de forma que $y(t)$ permanece constante

$$y(t) = y(0), 0 \leq t < t_c. \quad (2.19)$$

A partir de t_c , α toma el valor 1 pero como $x(t) = 0, \forall t > t_c$ de nuevo resulta que $y(t)$ no varía. Es decir, si $x(0) < 0$ entonces

$$y(t) = y(0), \forall t \quad (2.20)$$

al utilizar la prescripción (2.12), porque o bien la planta está apagada o bien la productividad es nula.

Si inicialmente la productividad $x(0)$ es positiva, α toma inicialmente el valor 1. Con $\alpha = 1$, $x(t)$ evoluciona según

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (2.21)$$

que es siempre positivo con lo que $\alpha = 1, \forall t$. Como la productividad $x(t)$ tiende a cero, la producción $y(t)$ acaba llegando a un valor de saturación. En efecto, utilizando (2.18) tenemos

$$y(t) = y(0) + \tau x(0)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} y(0) + \tau x(0) \quad (2.22)$$

La evolución de $x(t)$ e $y(t)$ se muestra en la parte izquierda de la figura 2.4 para el caso $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ y $\tau = 1, x_{fc} = 1$.

En cualquiera de ambos casos, $x(0)$ positivo o negativo, la producción $y(t)$ alcanza un valor de saturación si utilizamos la maximización del ritmo de producción (2.12).

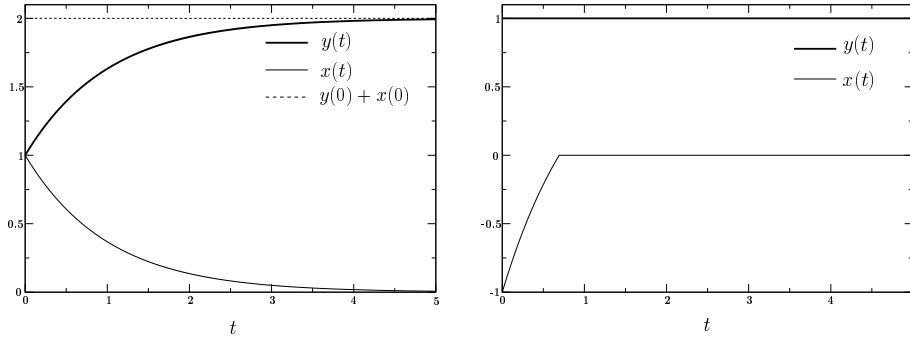


Figura 2.4: Evolución temporal del sistema dinámico bajo la acción de la prescripción (2.12) para un valor inicial de la productividad positivo ($x(0) = 1$, izquierda) y negativo ($x(0) = -1$, derecha). Se ha tomado $\tau = 1$ y $x_{fc} = 1$ por simplicidad, e $y(0) = 1$ por claridad en la representación.

En resumen, la política de selección (2.12) lleva al sistema a un estado estacionario de productividad nula. Cuando la productividad es mayor que cero, por supuesto que obtenemos mayor rendimiento instantáneo si conectamos la planta, pero también provocamos un descenso de la productividad que, de mantenerse demasiado tiempo, puede acabar agotando el sistema. Al igual que ocurría con los juegos paradójicos, es posible mejorar la producción dejando la planta descansar cuando todavía la productividad es positiva. Una posibilidad sería realizar periódicamente la conexión y desconexión. Si el tiempo en el que explotamos la planta es suficientemente largo, conseguiremos finalmente acumular mayor producción que mediante la estrategia anterior.

2.2.1 Solución mediante el principio de Bellman

Pese a la sencillez y linealidad del sistema, no es sencillo encontrar la estrategia óptima para $\alpha(t)$. Si bien es posible que el principio de Pontryagin (Layton, 1976) permita resolver el problema, su solución no es ni mucho menos evidente. No obstante, el Criterio de Bellman sí permite resolver de forma sencilla el sistema discretizado correspondiente. Es suficiente realizar la discretización de (2.11) según

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - h(x_k - 1 + \alpha_k) \\ y_{k+1} &= y_k + h\alpha_k x_k \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde h es un pequeño paso temporal. El índice temporal k recorre los valores $k = 0, 1, \dots, N$ de forma que $x(0) = x_0$ e $y(T) = y_N$. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, se ha tomado $x_{fc} = \tau = 1$.

Con esta discretización, el problema se reformula así: “Encuéntrese la estrategia o conjunto de decisiones óptimas α_k ($k = 0, 1, \dots, N$) tal que y_N sea

máximo". El Criterio de Bellman establece que dada una secuencia óptima α_k , las decisiones finales a partir de un paso n arbitrario α_k ($k = n, \dots, N$) constituyen una estrategia óptima considerando como estado inicial el x_n resultante de las primeras decisiones α_k ($k = 0, \dots, n-1$).

En otras palabras, supongamos que tenemos que tomar la última decisión. Como esta decisión no afecta al futuro puesto que es la última, la decisión óptima es la dada por la maximización local de y_N , sin las restricciones dadas por la evolución de x_k . En nuestro caso, consiste en tomar

$$\alpha_N(x_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_N > 0 \\ 0 & \text{si } x_N \leq 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Una vez que sabemos cuál es la decisión óptima en el último paso podemos calcular la decisión óptima en el penúltimo paso. Para ello, supongamos que llegamos al penúltimo paso con estado x_{N-1} . Basta con comparar dos posibilidades:

1. Tomamos $\alpha_{N-1} = 1$, calculamos a qué estado x_N nos conduce esta decisión, y utilizamos (2.24) para obtener la decisión final óptima. Evaluamos la contribución de estos dos pasos a la magnitud y que queremos maximizar, es decir, $1 \times x_{N-1} + \alpha_N(x_N)x_N$.
2. Tomamos $\alpha_{N-1} = 0$, que nos llevará a otro estado x'_N , volvemos a utilizar (2.24) para obtener la decisión final óptima en este otro caso. Evaluamos la contribución a la cantidad y , que en este caso vale $\alpha_N(x'_N)x'_N$.

Finalmente, comparamos ambas posibilidades y elegimos la que proporcione la contribución mayor. Como resultado obtenemos la decisión penúltima y última que resultan óptimas en función del valor x_{N-1} . Utilizando el conocimiento de las decisiones óptimas para los dos últimos pasos podemos calcular las tres últimas decisiones óptimas, etcétera.

El criterio de Bellman nos permite pues encontrar la secuencia completa de decisiones óptimas procediendo de forma recursiva y hacia atrás, en función únicamente del estado inicial. Además, la estrategia óptima calculada se puede expresar en función del estado x_k del sistema en cada paso, lo que permite su aplicación como un control retroalimentado. A continuación expondremos los detalles.

Sea $\hat{y}_N(x_0)$ el valor máximo de $y(N)$ para el proceso de N pasos que se origina en x_0 , es decir

$$\hat{y}_N(x_0) = \max_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N} \left(\sum_{k=0}^N h \alpha_k x_k \right). \quad (2.25)$$

Puesto que el paso temporal h es una constante, obtendremos el mismo resultado maximizando la función $J(N) = \sum_{k=0}^N (\alpha_k x_k)$, donde se ha eliminado h y cuyo valor máximo $\hat{J}_N(x_0)$ será

$$\hat{J}_N(x_0) = \max_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N} \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k x_k \right) \quad (2.26)$$

Como la secuencia de decisiones es óptima, según el principio de Bellman, se cumple para $N > 0$ que

$$\hat{J}_N(x_0) = \max_{\alpha_0} [\alpha_0 x_0 + \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k)] = \max_{\alpha_0} [\alpha_0 x_0 + \hat{J}_{N-1}(x_1)] \quad (2.27)$$

Utilizando la discretización (2.23), escribimos el estado del sistema en el paso 1 en función de la condición inicial x_0 , con lo que obtenemos

$$\hat{J}_N(x_0) = \max_{\alpha_0} [\alpha_0 x_0 + \hat{J}_{N-1}(x_1)] = \max_{\alpha_0} \{\alpha_0 x_0 + \hat{J}_{N-1}[x_0 - h(x_0 - 1 + \alpha_0)]\}. \quad (2.28)$$

Tenemos además para $N = 0$ que

$$\hat{J}_0(x_0) = \max_{\alpha_0} (\alpha_0 x_0) \quad (2.29)$$

lo que nos permite cerrar la ecuación de recurrencia. Esta relación resulta especialmente útil si la aplicamos al subproceso consistente en los últimos n pasos del proceso total de N y que arranca en el estado x_{N-n} :

$$\hat{J}_n(x_{N-n}) = \max_{\alpha_{N-n}} \{\alpha_{N-n} x_{N-n} + \hat{J}_{n-1}[x_{N-n} - h(x_{N-n} - 1 + \alpha_{N-n})]\}, \quad (2.30)$$

con

$$\hat{J}_0(x_N) = \max_{\alpha_N} (\alpha_N x_N). \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.30) y (2.31) ponen de manifiesto el hecho de que solamente en el último paso podemos realizar una maximización local, puesto que al ser la última decisión ésta no va a influir sobre el futuro del sistema. La solución a la ecuación de recurrencia (2.30) se puede encontrar, por tanto, partiendo desde (2.31) y procediendo hacia atrás.

Puesto que α sólo puede tomar valores 0 ó 1, la solución de (2.31) es

$$\hat{J}_0(x_N) = \begin{cases} x_N, & \text{si } x_N > 0 \ (\Leftrightarrow \alpha_N = 1) \\ 0, & \text{si } x_N \leq 0 \ (\Leftrightarrow \alpha_N = 0) \end{cases} \quad (2.32)$$

Tomando $n = 1$ en (2.30), tenemos

$$\hat{J}_1(x_{N-1}) = \max_{\alpha_{N-1}} \{\alpha_{N-1} x_{N-1} + \hat{J}_0[x_{N-1} - h(x_{N-1} - 1 + \alpha_{N-1})]\} \quad (2.33)$$

Llamemos

$$J_1(x_{N-1}, \alpha_{N-1}) \equiv \alpha_{N-1} x_{N-1} + \hat{J}_0[x_{N-1} - h(x_{N-1} - 1 + \alpha_{N-1})] \quad (2.34)$$

a la función cuyo máximo tenemos que hallar. Sea además x_{N-1}^c el valor crítico de x_{N-1} que cumple

$$J_1(x_{N-1}^c, 1) = J_1(x_{N-1}^c, 0), \quad (2.35)$$

es decir,

$$x_{N-1}^c + \hat{J}_0[(1-h)x_{N-1}^c] = \hat{J}_0[(1-h)x_{N-1}^c + h]. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) se puede resolver puesto que el valor de \hat{J}_0 ya se ha resuelto previamente. Una vez obtenido x_{N-1}^c , de la definición de $J_1(x_{N-1}, \alpha_{N-1})$ vemos que

$$x_{N-1} \geq x_{N-1}^c \Rightarrow J_1(x_{N-1}, 1) \geq J_1(x_{N-1}, 0) \quad (2.37)$$

$$x_{N-1} < x_{N-1}^c \Rightarrow J_1(x_{N-1}, 1) < J_1(x_{N-1}, 0) \quad (2.38)$$

y por tanto, el valor máximo de $J_1(x_{N-1}, \alpha_{N-1})$ se puede escribir como

$$\hat{J}_1(x_{N-1}) = \begin{cases} x_{N-1} + \hat{J}_0[(1-h)x_{N-1}], & \text{si } x_{N-1} > x_{N-1}^c (\Rightarrow \alpha_{N-1} = 1) \\ \hat{J}_0[(1-h)x_{N-1} + h], & \text{si } x_{N-1} \leq x_{N-1}^c (\Rightarrow \alpha_{N-1} = 0) \end{cases} \quad (2.39)$$

Nótese que (2.37) y (2.38) también proporcionan los valores óptimos de α_{N-1} , que se han escrito en (2.39) entre paréntesis.

El procedimiento se puede repetir para $n = 2, 3 \dots N$, obteniéndose todos los valores críticos $x_k^c, (k = 0 \dots N)$, y pudiéndose expresar por tanto la correspondiente secuencia de decisiones óptimas $\alpha_k, (k = 0 \dots N)$ en términos del estado del sistema como

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{si } x_k \geq x_k^c \\ 0, & \text{si } x_k < x_k^c \end{cases} \quad (2.40)$$

o, volviendo a tiempo continuo

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x(t) \geq x^c(t) \\ 0, & \text{si } x(t) < x^c(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

La figura 2.5 muestra el cálculo numérico de $x^c(t)$ para un paso de discretización temporal $h = 0.001$ y diferentes valores del tiempo total $T = 2, 3$ y 4 (el pseudocódigo del algoritmo que permite hallar los x_k^c críticos se muestra en el apéndice F). Vemos que $x^c(t)$ permanece en un valor constante de 0.5 (en realidad, $0.5x_{fc}$, ya que anteriormente hemos tomado $x_{fc} = 1$ por sencillez) hasta un cierto momento cercano al final del intervalo $[0, T]$ en el que tiende a 0 rápidamente.

De aquí podemos deducir que la política óptima $\alpha(t)$ se comporta de la siguiente manera. Se da primero una fase en la que la productividad $x(t)$ tiende al valor 0.5 . Esto se consigue tomando $\alpha = 0$ si $x(0) < 0.5$ y $\alpha = 1$ si $x(0) \geq 0.5$. En el momento que $x(t)$ alcanza 0.5 , se producen una serie de cambios rápidos entre $\alpha = 1$ y $\alpha = 0$ de modo que la productividad del sistema permanece cercana a 0.5 . Por último, cuando nos acercamos al final del intervalo en el que se permite el aprovechamiento de la planta, x^c empieza decrecer rápidamente, lo que hace que se seleccione $\alpha = 1$. La figura 2.6 muestra el comportamiento del sistema cuando evoluciona siguiendo la política óptima $\alpha(t)$.

Estas tres etapas se pueden explicar de una forma sencilla para cualquier valor de x_{fc} y τ . Supongamos por un momento que $\alpha(t)$ es constante y puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 1]$. En este caso $x(t)$ alcanza un valor

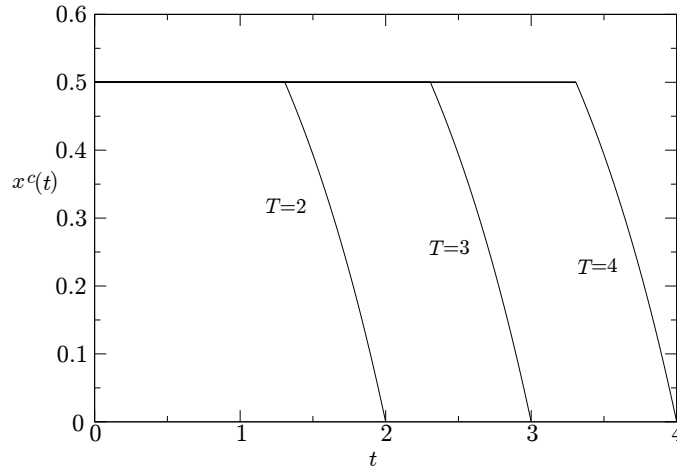


Figura 2.5: Cálculo numérico de $x^c(t)$, para $h = 0.001$, $T = 2, 3$ y 4 , y $\tau = x_{fc} = 1$.

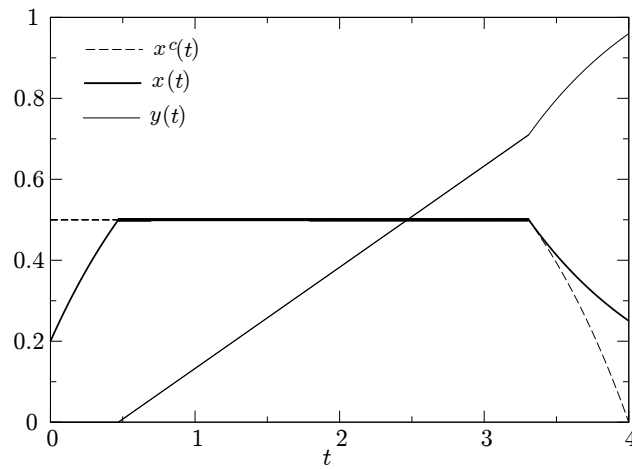


Figura 2.6: La producción acumulada $y(t)$, la productividad $x(t)$, y el valor crítico $x^c(t)$ para la versión discretizada con $x(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, $T = 4$, para $\tau = x_{fc} = 1$. Tanto la solución de las ecuaciones de recursión como la evolución del sistema se han obtenido numéricamente con paso temporal $h = 0.001$.

estacionario $x_{st} = x_{fc}(1 - \alpha)$, dando lugar a una pendiente estacionaria para la producción acumulada $y(t)$ de

$$\dot{y}(t) = \alpha x_{st} = x_{fc}[\alpha(1 - \alpha)], \quad (2.42)$$

que alcanza su valor máximo para $\alpha = 1/2$ y $x_{st} = x_{fc}/2$. Por tanto, la estrategia óptima debería tratar de llevar $x(t)$ hacia $x_{fc}/2$ lo más rápidamente posible (primera etapa) y mantenerlo allí (segunda etapa). Es decir, tratar de mantener la planta trabajando a la mitad de su capacidad máxima. Como en nuestro caso α sólo puede tomar valores 0 y 1, esto ha de conseguirse mediante rápidas oscilaciones o saltos entre estos dos valores de modo que el valor efectivo de α sea 0.5. Este modo de actuar proporciona una pendiente estacionaria para $y(t)$ que es $\dot{y}(t) = x_{fc}/4$, definitivamente mayor que la pendiente nula que obtenemos utilizando la política de maximización instantánea expresada en (2.12).

Por último, la tercera etapa se puede interpretar como se explica a continuación. Sabemos que hemos de abandonar la planta de producción en el tiempo T y que no nos importa lo que suceda más allá de ese tiempo. Por tanto, cuando t se acerca a T , la política óptima ha de consistir en seleccionar $\alpha = 1$ para obtener la mayor cantidad de producto $y(T)$ posible, sin importarnos si dejamos la planta agotada. Esto es análogo a lo que le ocurre a un corredor de media distancia por ejemplo, que ha de reservarse y mantener un ritmo aproximadamente constante durante la mayor parte de la prueba hasta que, cercana la meta, realiza un “sprint” y usa todas sus fuerzas. Con esta idea en mente, hemos llamado a la tercera etapa el sprint. Se puede calcular la duración óptima del sprint de nuestro modelo sin más que suponer que partimos del estado estacionario del modelo efectivo (en el que a α se le permiten valores intermedios), esto es,

$$x(0) = x_{fc}/2 \text{ y } \alpha(t) = 1/2, \text{ para } t < T - t_{\text{sprint}} \quad (2.43)$$

momento a partir del cual realizamos el sprint seleccionando

$$\alpha(t) = 1, \text{ para } t > T - t_{\text{sprint}}. \quad (2.44)$$

Podemos calcular $y(T)$ integrando las ecuaciones correspondientes a cada una de estas dos etapas. Como hemos visto más arriba, en el estado estacionario del modelo efectivo, $x(t)$ permanece constante

$$x(t) = \frac{x_{fc}}{2}, \text{ para } t < T - t_{\text{sprint}} \quad (2.45)$$

e $y(t)$ crece con pendiente estacionaria

$$\dot{y} = \frac{x_{fc}}{4}. \quad (2.46)$$

Por tanto,

$$y(t) = \frac{x_{fc}}{4}t, \quad t < T - t_{\text{sprint}} \quad (2.47)$$

ya que este estado estacionario dura solo hasta que comienza el sprint. En el momento que comienza el sprint, α pasa a valer 1, de modo que la solución a las ecuaciones (2.11) es

$$x(t) = x(T - t_{\text{sprint}})e^{-\frac{1}{\tau}(t-T+t_{\text{sprint}})} = \frac{x_{\text{fc}}}{2}e^{-\frac{1}{\tau}(t-T+t_{\text{sprint}})} \quad (2.48)$$

y la producción

$$y(t) = y(T - t_{\text{sprint}}) + \int_{T-t_{\text{sprint}}}^T dt' \alpha(t')x(t') = \frac{x_{\text{fc}}}{4}(T - t_{\text{sprint}}) + \frac{\tau x_{\text{fc}}}{2} \left(1 - e^{-\frac{t_{\text{sprint}}}{\tau}}\right) \quad (2.49)$$

El máximo valor de $y(T)$ se alcanza para t_{sprint} dado por

$$\frac{dy(T)}{dt_{\text{sprint}}} = 0 \Rightarrow -\frac{x_{\text{fc}}}{4} + \frac{x_{\text{fc}}}{2}e^{-\frac{t_{\text{sprint}}}{\tau}} = 0 \quad (2.50)$$

cuya solución es

$$t_{\text{sprint}} = \tau \log 2 \simeq 0.7\tau \quad (2.51)$$

lo que está de acuerdo con las distintas soluciones representadas en la figura 2.5 y con el comportamiento mostrado en la figura 2.6.

Así pues, hemos visto cómo el mecanismo que explica por qué las estrategias avariciosas o de optimización a corto plazo pueden resultar peores que estrategias ciegas es, en cierto modo, más general y puede aparecer en otro tipo de sistemas, como el sistema dinámico lineal explicado en esta sección. Además hemos introducido una herramienta, el principio de Bellman, que será utilizada más adelante para el análisis de los juegos paradójicos en su versión original.

2.3 Los juegos democráticos

Extendemos ahora la investigación en torno a las estrategias de control en los juegos colectivos considerando una nueva estrategia basada en la votación y la regla de la mayoría. Este tipo de regla, que difiere de la considerada en la sección 2.1, es relevante en situaciones diversas, tales como la modelización de la opinión pública o el diseño de redes neuronales multi-capa formadas por “committee machines” o *máquinas de comités*. Veremos en esta sección que la votación conduce a un control muy ineficiente, al igual que ocurría con la estrategia avariciosa. Si cada jugador vota por el juego que le resulta más beneficioso en cada turno, entonces el capital total decrece a medida que avanzan los turnos, mientras que de nuevo estrategias ciegas resultan ganadoras.

2.3.1 El modelo.

El modelo está formado por un gran número de individuos que juegan de forma independiente a los juegos de Parrondo A y B, descritos en la sección 1.3.1. En cada turno, los jugadores toman una decisión colectiva sobre si toca A o B y

entonces cada uno de ellos juega contra el casino siguiendo las reglas del juego escogido. Consideraremos tres maneras posibles para la elección del juego en cada turno:

- *Aleatoria*. El juego se escoge aleatoriamente con igual probabilidad.
- *Periódica*. El juego se escoge siguiendo una secuencia predeterminada, por ejemplo ABBABB...
- *Votación y regla de la mayoría*. Cada jugador vota por el juego más conveniente para él, es decir, el que le proporciona una mayor probabilidad de ganar, y finalmente se juega a aquél, A o B, que reciba mayor número de votos.

El modelo está relacionado con otras extensiones de los juegos originales como las descritas en (Toral, 2001; Toral, 2002) en las que también se consideran conjuntos de jugadores interaccionando. Sin embargo, en nuestro modelo, la única interacción se produce en el momento de tomar la decisión de forma colectiva. Una vez el juego ha sido seleccionado, cada individuo juega contra el casino de forma totalmente independiente. Las estrategias aleatoria y periódica no suponen de hecho ninguna interacción entre los jugadores, siendo totalmente equivalentes a los juegos originales con un solo jugador. No obstante, servirán como comparación para la tercera, ya que mientras esta última hace uso de cierta información sobre el estado del sistema, las primeras actúan de forma totalmente ciega al estado del sistema.

Puesto que mediante la votación, se hace en cada turno aquello que beneficia a la mayoría de los jugadores, uno esperaría un mejor resultado que para las estrategias ciegas. Sin embargo, no solo no es así, si no que la regla de la mayoría acaba provocando pérdidas a todos los jugadores, mientras las estrategias ciegas, como ya vimos en la sección 1.3.2 producen ganancias sistemáticas. Esta situación se muestra en la figura 2.7, donde se representa la evolución del capital medio por jugador para las tres estrategias consideradas.

2.3.2 Análisis.

Al igual que hicimos en la sección 2.1.1, podemos definir el vector $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ cuyas componentes corresponden a la fracción de jugadores con capital módulo 3 igual a 0, 1 o 2, respectivamente. Puesto que para las estrategias aleatoria y periódica, los jugadores son completamente independientes, estas fracciones evolucionarán siguiendo las mismas ecuaciones (1.103) para la aleatoria y (1.108), (1.109) y (1.110) para la periódica, que ya se detallaron en la sección 1.3.2 para los juegos originales. La evolución del capital medio de los jugadores será también equivalente a la anteriormente calculada en dicha sección.

Para determinar el comportamiento del sistema bajo la acción de la regla de la mayoría no obstante, debemos responder primero a la siguiente cuestión. ¿Cuántos jugadores votan por cada uno de los juegos? Puesto que los jugadores

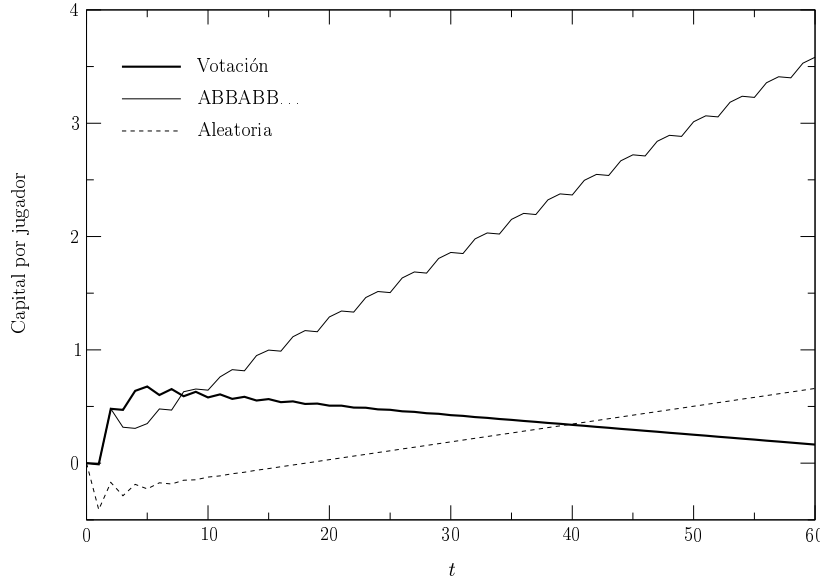


Figura 2.7: Evolución del capital promedio por jugador en un conjunto infinito para $\epsilon = 0.005$, para las tres estrategias consideradas en el texto.

votan al juego que mayor probabilidad de ganar les proporciona, todos los jugadores cuyo capital sea un múltiplo de tres votarán por el juego A para evitar la moneda mala del juego B. Consecuentemente es $\pi_0(t)$ la fracción de jugadores que vota por el juego A, mientras que el resto $1 - \pi_0(t)$ votarán jugar al B para aprovechar la moneda buena. Así pues, si $\pi_0 \geq 1/2$, entonces habrá más votos para el juego A, y en caso contrario, la mayoría preferirá el juego B. Esto se refleja en la ecuación de evolución para $\pi(t)$ en el hecho de que la matriz estocástica que relaciona pasos sucesivos puede ser igual a la matriz correspondiente al juego A (Π_A) o a la del juego B (Π_B), dependiendo del valor de la primera componente de $\pi(t)$. Es decir,

$$\pi(t+1) = \Pi(t)\pi(t) \quad (2.52)$$

con

$$\Pi(t) = \begin{cases} \Pi_A & \text{si } \pi_0(t) \geq 1/2, \\ \Pi_B & \text{si } \pi_0(t) < 1/2, \end{cases} \quad (2.53)$$

Para calcular la evolución del capital representada en la figura 2.7, basta con utilizar (2.52) y (2.53) para calcular, de forma numérica, la probabilidad de ganar en cada uno de los juegos

$$\begin{aligned} p_{\text{winA}}(t) &= \frac{1}{2} - \epsilon \\ p_{\text{winB}}(t) &= \frac{1}{10}\pi_0(t) + \frac{3}{4}(1 - \pi_0(t)) - \epsilon. \end{aligned} \quad (2.54)$$

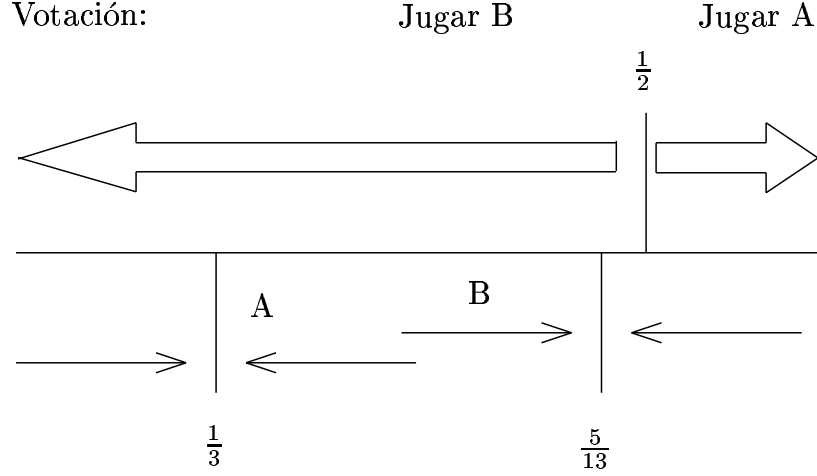


Figura 2.8: Representación esquemática de la evolución de $\pi_0(t)$ bajo la acción de los juegos A y B. En la parte superior se representa el juego que se elegiría por votación.

y substituir $p_{\text{win}}(t) = p_{\text{winA}}(t)$ o bien $p_{\text{win}}(t) = p_{\text{winB}}(t)$, dependiendo de qué juego se juegue en el turno t , en la siguiente expresión para la evolución del capital:

$$\langle X(t+1) \rangle = \langle X(t) \rangle + 2p_{\text{win}}(t) - 1 \quad (2.55)$$

2.3.3 Explicación del fenómeno.

Aunque en la sección anterior hemos visto como podemos calcular de forma semi-analítica la evolución del capital de los jugadores para las distintas estrategias, en esta sección nos proponemos proporcionar una explicación intuitiva sobre el fenómeno de la ineficiencia de la estrategia de votación así como identificar las claves del mecanismo subyacente que la provoca.

Para ello, fijémonos primero en el comportamiento de $\pi_0(t)$ para $\epsilon = 0$ cuando se juega A o B por separado. Si jugamos a A durante un número suficientemente grande de turnos, $\pi_0(t)$ tenderá a $1/3$ como vimos en la sección 1.3.2 (nótese de todas formas que el capital es un camino aleatorio bajo las reglas del juego A con $\epsilon = 0$). Por otra parte, si B se juega repetidamente $\pi_0(t)$ tenderá a $5/13$. Como también se vio en la sección 1.3.2, el juego B resulta justo si $\pi_0 = 5/13$ cuando $\epsilon = 0$.

La figura 2.8 muestra esquemáticamente la evolución de $\pi_0(t)$ bajo la acción de cada juego así como la prescripción dada por la votación. Vemos en esta figura que mientras $\pi_0(t)$ no supere $1/2$, la votación impone el juego B y que el juego B implica a su vez que $\pi_0(t)$ va a tender hacia $5/13$, que está muy por debajo del límite marcado por $1/2$. Por tanto, más de la mitad de los jugadores

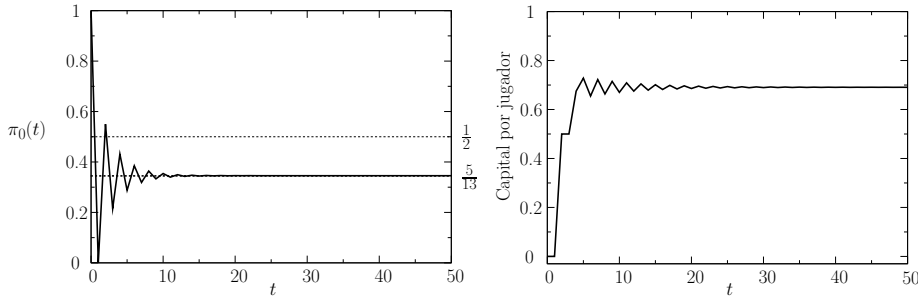


Figura 2.9: Evolución de $\pi_0(t)$ (izquierda) y del capital promedio por jugador (derecha) cuando se elige el juego por votación.

volverá a votar de nuevo al juego B en el siguiente turno. Tras un cierto número de turnos, la estrategia de la votación queda atrapada jugando B para siempre de modo que $\pi_0(t)$ se acerca asintóticamente a $5/13$. A medida que esto sucede, B se convierte en un juego justo (para $\epsilon = 0$) y en consecuencia, la elección del juego por votación deja de producir beneficios. En la figura 2.9 se puede ver que efectivamente $\pi_0(t)$ tiende finalmente a $5/13$ bajo la acción de la votación. También se muestra en el panel de la derecha el capital correspondiente a dicha evolución donde se observa cómo al acercarse $\pi_0(t)$ a $5/13$ el capital tiende a hacerse constante.

Finalmente, restar a las probabilidades de ganar de las monedas de los juegos un cierto $\epsilon > 0$ tiene el efecto de volver B un juego perdedor si se juega repetidamente, haciendo pues que la estrategia basada en la votación se convierta también en perdedora.

Por otra parte, las estrategias periódica y aleatoria mantienen $\pi_0(t)$ por debajo de $5/13$ gracias a la alternancia entre A y B, de modo que el juego B produzca beneficios, incluso para $\epsilon > 0$ siempre que sea suficientemente pequeño. Este comportamiento se observa claramente en la figura 2.10, donde se ha representado la evolución de $\pi_0(t)$ y la correspondiente evolución del capital para la estrategia aleatoria, comparándola con el resultado de la votación.

En resumen, si los jugadores eligen el juego de manera democrática, todos resultan perjudicados pues el capital total muestra una tendencia a la baja como la que se muestra en la figura 2.7. Para superar la tendencia perdedora, los jugadores han de sacrificar sus beneficios a corto plazo, no solo por el interés de la comunidad si no por el de sus propios beneficios futuros. De aquí se deduce que cierto tipo de cooperación es necesario. Toral ha descubierto un efecto similar en otra versión colectiva de los juegos de Parrondo en los que repartir el capital entre los jugadores beneficia a todos ellos. Lo más sorprendente de nuestro caso es quizás que no sea necesaria una cooperación compleja, basta con que los jugadores acuerden votar al azar.

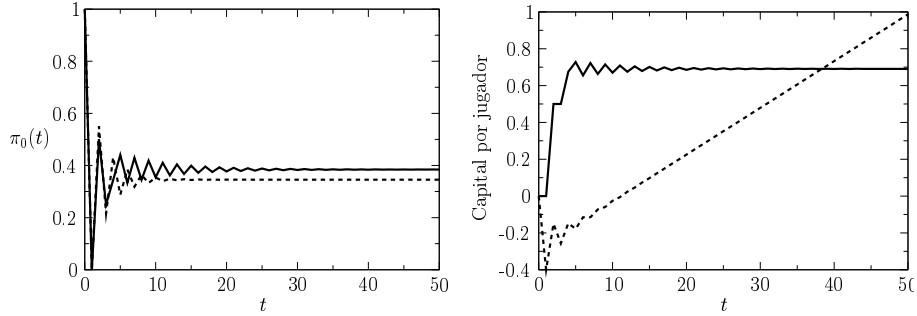


Figura 2.10: Comparación de la evolución de $\pi_0(t)$ (izquierda) y del capital promedio por jugador (derecha) cuando se elige el juego por votación o siguiendo una estrategia aleatoria.

2.3.4 Juegos dependientes de la historia

Los juegos de Parrondo pueden modificarse para eliminar la dependencia con el capital en el turno t , pudiendo sustituir ésta por una dependencia en la historia de ganancias o pérdidas en los dos turnos anteriores $t-2$ y $t-1$ (Parrondo *et al.*, 2000a). Los juegos colectivos dependientes de la historia muestran fenómenos similares a los considerados hasta aquí al aplicar la regla de la mayoría en la selección del juego por votación. No obstante, para que ello ocurra, es necesario introducir un factor γ análogo al que aparece en la sección 2.1 y que determina la fracción de jugadores, elegidos al azar, a los que se les permite jugar en cada turno. Si γ es suficientemente pequeño, las estrategias ciegas resultan ganadoras puesto que los jugadores siguen siendo independientes, y el factor γ sólo resulta para ellas un reescalado de la variable temporal, esto es, del número de turnos. La votación sin embargo produce un decrecimiento del capital promedio para ϵ pequeño y positivo. Estos resultados se muestran en la figura 2.11 para $\gamma = 0.5$ y $\epsilon = 0.005$. La explicación del fenómeno es similar a la anteriormente dada para el fenómeno en los juegos paradójicos dependientes del capital: la votación avariciosa evita la alternancia necesaria entre los juegos, si bien en este caso es el juego A el que acaba por jugarse demasiadas veces seguidas. Por ejemplo, en el caso representado en la figura 2.11, la votación terminó jugando AAAAAAAAAAB de forma periódica.

2.4 Número finito de jugadores

En las secciones anteriores hemos mostrado cómo la estrategia avariciosa o la selección del juego por votación resultan perdedoras cuando el número de jugadores es muy grande. Más estrictamente, ambos efectos se han analizado en el límite de un número infinito de jugadores, aunque lógicamente son correctos aproximadamente siempre que el número de jugadores sea suficientemente grande. No obstante, si consideramos un solo jugador al que se le permite elegir el

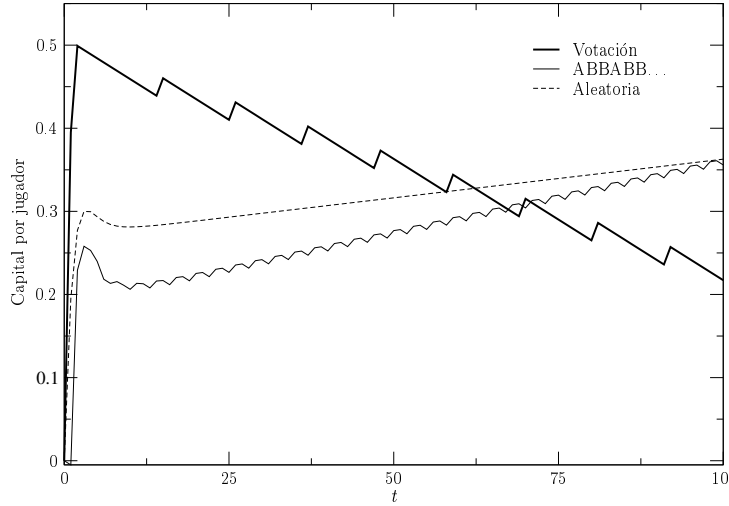


Figura 2.11: Capital promedio por jugador en los juegos dependientes de la historia para las tres estrategias mencionadas en el texto, con $\gamma = 0.5$ y $\epsilon = 0.005$. La votación converge a la secuencia periódica (y perdedora) [10,1].

juego según cualquiera de estas estrategias, el capital del jugador crecerá rápidamente. En este caso, ambas estrategias, avariciosa y democrática, coinciden y consisten en jugar A si el capital del jugador es múltiplo de 3 y B en caso contrario. Como siempre se evita la moneda mala del juego B, estas estrategias resultan tremendamente beneficiosas, y en particular se puede demostrar que constituyen la estrategia óptima para un solo jugador (Cleuren y Van den Broeck, 2004) si a este se le deja decidir el juego en función de su capital en cada turno. Algo similar ocurre con dos jugadores, si bien las estrategias avariciosa o democrática producen un beneficio por jugador menor que en el caso de un solo jugador.

Existe pues una transición entre un comportamiento ganador para un número pequeño de jugadores y uno perdedor para un número suficientemente grande de ellos. Estudiar esta transición es el objeto de la presente sección, así como presentar nuevas versiones de los juegos colectivos basadas en estos fenómenos.

2.4.1 Resultados de simulación

La evolución del sistema depende tan solo de cuantos jugadores se encuentren en cada uno de los tres estados 0, 1, ó 2 para el capital. Por tanto, el estado del sistema colectivo está dado por el vector $(\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ de las fracciones de jugadores en cada estado en el turno t . Puesto que el número de jugadores es finito, cada una de estas fracciones puede tomar valores $0, 1/N, 2/N, \dots, 1$, por lo que el número de estados posibles será un conjunto discreto y finito, de tamaño no superior a $(N + 1)^2$. Como además debido a que el número de

jugadores totales se conserva, tenemos la condición de normalización $\pi_0(t) + \pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$, para todo turno t , el número total de estados diferentes del sistema es $(N+1)(N+2)/2$. Así pues, si el número de jugadores es finito, las fracciones de $(\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ resultan ser variables estocásticas.

Los juegos colectivos para N jugadores siguen siendo una cadena de Markov, eso sí de $(N+1)(N+2)/2$ estados. Las ecuaciones de evolución estarán dadas por una matriz $(N+1)(N+2)/2 \times (N+1)(N+2)/2$, cuyos elementos están constituidos por las probabilidades de transición en un paso o turno de unos estados a otros. Como veremos en el capítulo 4, estas probabilidades se pueden calcular en función de las probabilidades de ganar en cada moneda p_A, p_b y p_m . Ello nos permitiría escribir ecuaciones de evolución para ambos juegos, pero también para la estrategia avariciosa o la votación y resolverlas al menos numéricamente. No obstante, calcular la matriz resulta computacionalmente muy costoso, sobre todo si superamos los 100 jugadores, por lo que hemos optado finalmente por realizar simulaciones y promediar a realizaciones para obtener las ganancias promedio por jugador.

Los resultados de las simulaciones para distintos números de jugadores se muestran en las figuras 2.12 para la votación y 2.13 para la estrategia avariciosa. En las figuras observamos que ambas estrategias son ganadoras para conjuntos poco numerosos y que a medida que crece el número de jugadores, las estrategias van siendo cada vez menos efectivas, llegando incluso a resultar perdedoras si el número de jugadores es suficientemente grande. El número de jugadores para el que ocurre dicho cambio de comportamiento de ganador a perdedor ocurre aproximadamente entre los 50 y 100 jugadores para la votación, mientras que para que la estrategia avariciosa resulte perdedora ha sido necesario contar con alrededor de un millón de jugadores. Si comparamos las figuras 2.13 y 2.1 vemos que con 10^7 jugadores el comportamiento del sistema bajo la estrategia avariciosa ya es similar al obtenido para infinitos jugadores.

2.4.2 Análisis de los efectos del número finito de jugadores

Como ya vimos en la sección 2.1, la elección del juego en cada turno por parte de ambas estrategias depende exclusivamente del valor de la fracción $\pi_0(t)$ de jugadores cuyo capital es un múltiplo de tres. Si el número de jugadores es finito, $\pi_0(t)$ es una variable estocástica, y la diferencia principal entre pocos o muchos jugadores en el sistema es la magnitud de las fluctuaciones de $\pi_0(t)$ en torno a su valor esperado. Cuando el sistema tiene pocos jugadores, su evolución es completamente estocástica, o dicho de otro modo, está dominada por las fluctuaciones. Tanto la estrategia avariciosa como la votación son capaces de aprovechar las fluctuaciones ganadoras y bloquear las perdedoras, funcionando como un mecanismo de rectificación.

Sin embargo, si el número de jugadores es suficientemente grande, la evolución del sistema se asemeja a la evolución media, es decir, a lo calculado para infinitos jugadores en la sección 2.1, a lo que hay que añadir unas pequeñas fluctuaciones. La figura 2.14 ilustra esta idea, comparando la evolución de $\pi_0(t)$ para la estrategia de la votación para el caso de 1000 jugadores e infinitos.

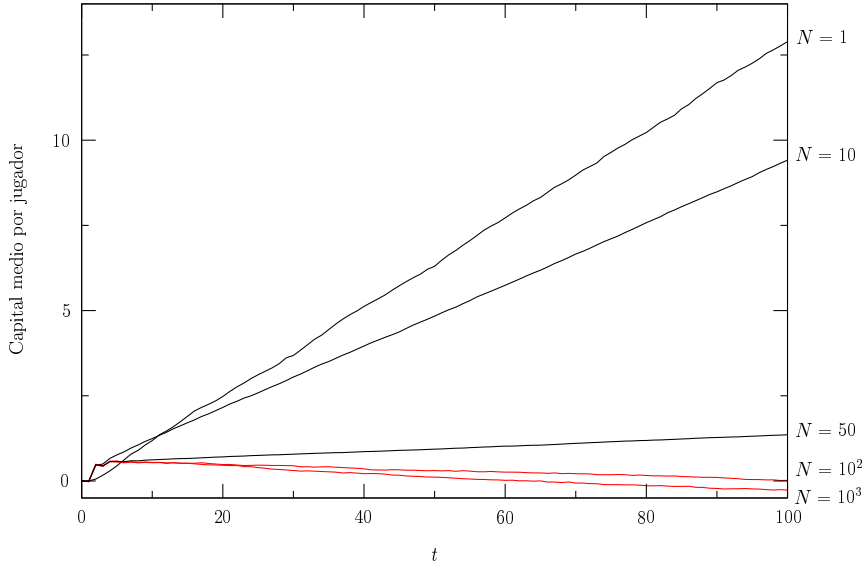


Figura 2.12: Resultados de simulación para el promedio del capital por jugador para la estrategia de la votación. Las distintas curvas representan simulaciones en conjuntos de $N = 1, 10, 50, 100$ y 1000 jugadores, todas para $\epsilon = 0.005$, lo que asegura que tanto el juego A como el B son perdedores. El capital ha sido promediado a 10000, 1000, 2000, 100 y 10 realizaciones, respectivamente.

Para que se elija el juego A por votación, π_0 ha de superar un valor umbral de $1/2$. Como se ve también en la figura 2.14, para 1000 jugadores π_0 alcanza aproximadamente, tras jugar B durante unos cuantos turnos seguidos, su valor esperado estacionario de $5/13$ y fluctúa levemente sin llegar a superar el valor crítico de $1/2$. De esta forma, para 1000 jugadores, la estrategia de la votación permanece jugando B a partir de entonces y resulta perdedora.

Para que se volviera a elegir A de nuevo tras haber jugado a B durante varios turnos seguidos, necesitaríamos una fluctuación cuyo valor fuera aproximadamente de orden $1/2 - 5/13 = 3/26 \simeq 0.115$. ¿Cuanto tenemos que reducir el número de jugadores para que las fluctuaciones sean de ese orden? Para poder estimar la magnitud de las fluctuaciones, debemos primero tener una idea aproximada de la distribución que sigue $\pi_0(t)$ en esta situación.

Si jugamos a B durante un número suficiente de turnos como para que nos encontremos aproximadamente en estado estacionario, la probabilidad de que un jugador cualquiera tenga capital múltiplo de 3 es aproximadamente constante e igual $5/13$. Por tanto, si tenemos N jugadores independientes, la probabilidad de tener en total $N\pi_0$ jugadores cuyo capital es múltiplo de 3, es la probabilidad de que se dé $N\pi_0$ veces un suceso que se repite N veces con probabilidad $5/13$. Es decir, la probabilidad de $N\pi_0$ sigue una distribución binomial de parámetro $p = 5/13$.

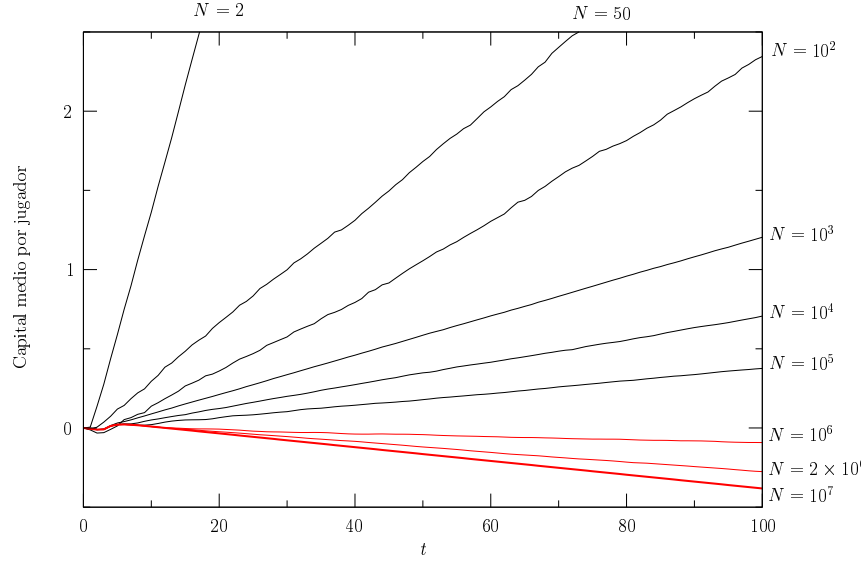


Figura 2.13: Resultados de simulación para el promedio del capital por jugador para la estrategia avariciosa con $\gamma = 0.5$. Las distintas curvas representan simulaciones en conjuntos de $N = 2, 50, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 2 \times 10^6$ y 10^7 jugadores, todas para $\epsilon = 0.005$, lo que asegura que tanto el juego A como el B son perdedores. El capital ha sido promediado a 5000, 200, 100, 1000, respectivamente, hasta 10^3 jugadores. Para 10^4 o más jugadores, las curvas representan el capital por jugador promediado en 100 realizaciones.

La media de la distribución binomial será Np , de donde el valor esperado de π_0 es igual a $5/13$, como debe ser por construcción:

$$\langle N\pi_0 \rangle = Np = N \frac{5}{13} \Rightarrow \langle \pi_0 \rangle = \frac{5}{13} \quad (2.56)$$

La varianza de una distribución binomial vale $Np(1-p)$, de donde

$$\langle (N\pi_0)^2 \rangle - \langle N\pi_0 \rangle^2 = Np(1-p) = N \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{13} \Rightarrow \langle \pi_0^2 \rangle - \langle \pi_0 \rangle^2 = \frac{1}{N} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{13} \quad (2.57)$$

por lo que las fluctuaciones de π_0 alrededor de su valor esperado $5/13$ valen

$$\sqrt{\langle \pi_0^2 \rangle - \langle \pi_0 \rangle^2} = \sqrt{\frac{40}{169N}} \quad (2.58)$$

Si queremos entonces que una fluctuación sea capaz de hacer que π_0 salte por encima de $1/2$ desde $5/13$ necesitamos que

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{13} = \sqrt{\frac{40}{169N}} \Rightarrow N \simeq 20 \quad (2.59)$$

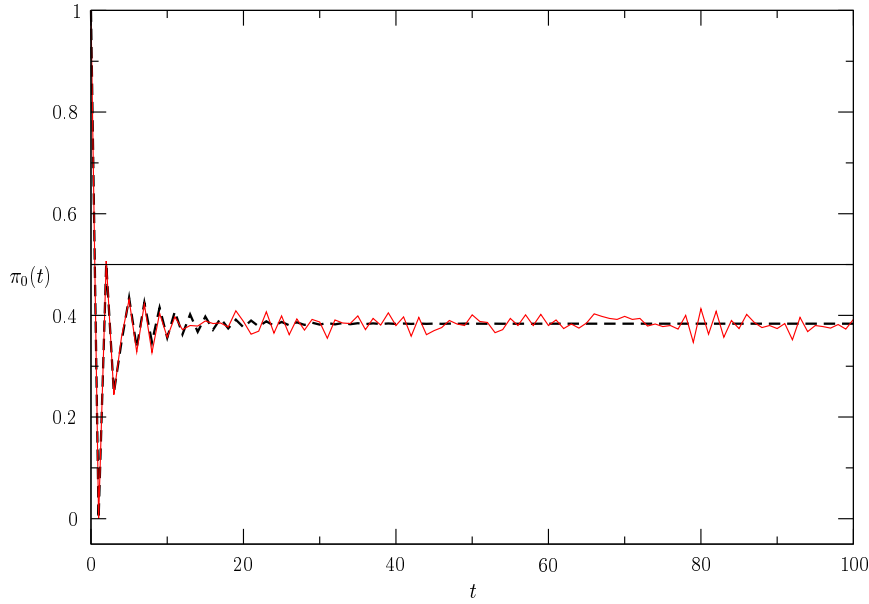


Figura 2.14: Evolución de $\pi_0(t)$ cuando se elige el juego por votación para una simulación con 1000 jugadores (línea continua) y para infinitos según la ecuación de evolución (línea discontinua).

Es decir, 20 marca de forma aproximada la frontera entre comportamiento ganador y perdedor de la estrategia de la votación. Por encima de 20 jugadores, las fluctuaciones que llevan a elegir el juego A son raras y la votación acaba eligiendo B durante demasiados turnos, como se ve en la evolución de π_0 para 70 jugadores representada en la figura 2.15. Por el contrario, para aproximadamente 20 jugadores se produce una alternancia de los juegos que resulta ganadora y, si el número de jugadores es menor que 20, puede llegar a batir a la mejor estrategia periódica predeterminada ABABB... (ver capítulo 3), como se muestra en la figura 2.16.

Para la estrategia avariciosa podemos realizar un razonamiento análogo, con la diferencia de que el valor crítico de π_0 que hay que superar para elegir A coincide a orden ϵ con el valor estacionario de π_0 , por lo que tenemos que desarrollar a este orden. Esto es, el valor crítico es $5/13$, mientras que el valor estacionario de π_0 para el juego B resulta ser $5/13 - \frac{440}{2197}\epsilon$. Fluctuaciones mucho más pequeñas que para el caso de la votación son capaces de hacer que la estrategia avariciosa elija el juego A, por lo que necesitamos un mayor número de jugadores para que la estrategia avariciosa se quede atrapada jugando B para siempre y resulte perdedora. Más concretamente

$$\frac{5}{13} - \frac{5}{13} + \frac{440}{2197}\epsilon = \sqrt{\frac{40}{169N}} \Rightarrow N \simeq 2 \times 10^5 \quad (2.60)$$

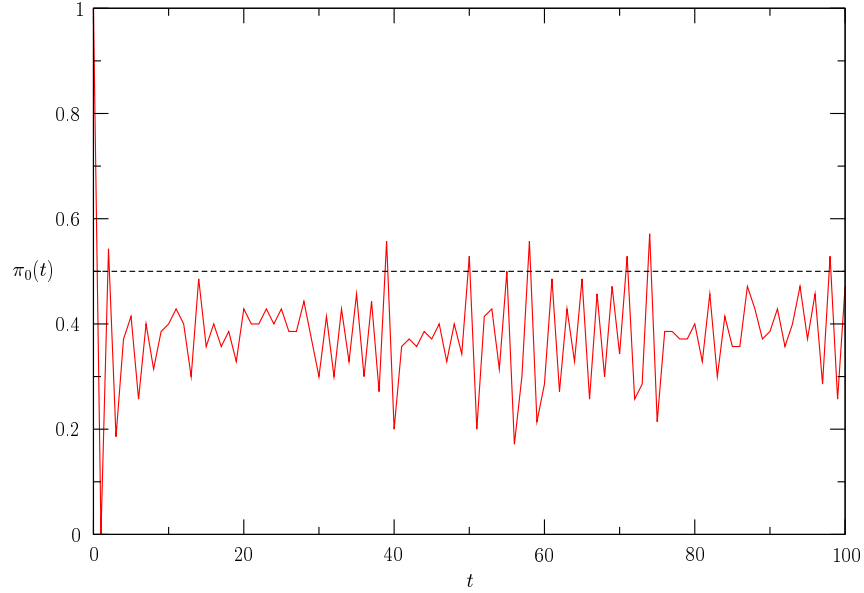


Figura 2.15: Evolución de π para una simulación con 70 jugadores. Las fluctuaciones que llevan a π_0 por encima de $1/2$ son raras y por tanto el juego A se elige pocas veces.

donde hemos tomado $\epsilon = 0.005$, valor utilizado en las simulaciones de este capítulo. Efectivamente en la figura 2.13 vemos que la transición de la estrategia avariciosa de ganadora a perdedora se efectúa entre 10^5 y 10^6 jugadores.

El presente análisis de los efectos de tomar un número finito de jugadores plantea la pregunta de cómo se puede utilizar la información sobre el estado del sistema para mejorar la eficiencia del mismo. Tanto la estrategia avariciosa como la democrática, son capaces de aprovechar la información contenida en las fluctuaciones solo cuando el número de jugadores es pequeño y las fluctuaciones son importantes. El análisis de las consecuencias que este efecto pueda tener en el caso de la “flashing ratchet” son el objeto del capítulo 5.

2.5 Otras formas de decisión colectiva

2.5.1 Dictador y oligarquía

Entre las posibles aplicaciones de los juegos paradójicos se ha sugerido el modelado de relaciones sociales (Galam, 2003; Kaprivski y Redner, 2003). Utilizando los efectos de tamaño finito descritos en esta sección, se han desarrollado nuevas variantes de los juegos colectivos que podrían representar esquemáticamente procesos sociales, como son la variante del dictador y la oligarquía. En el caso del “dictador”, un solo individuo decide de forma egoísta el destino de toda la

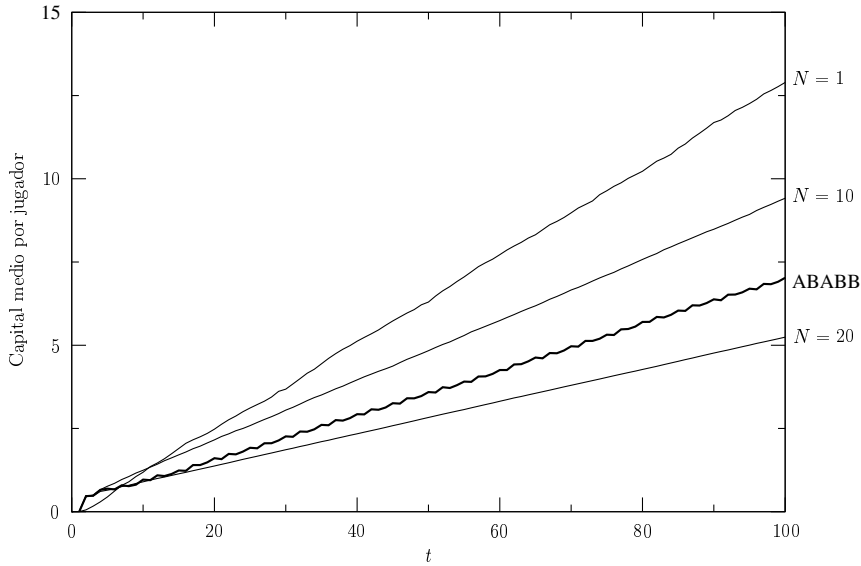


Figura 2.16: Comparación de los resultados de las simulaciones para la estrategia de la votación para $N = 1, 10$ y 20 jugadores (10^5 realizaciones) y 1 jugador utilizando la mejor estrategia periódica ABABB. Todos los resultados han sido promediados sobre 10000 realizaciones.

comunidad, con el resultado de que la comunidad evoluciona más favorablemente que en el caso de los juegos elegidos democráticamente por votación. También consideramos una generalización en la que un pequeño grupo de individuos, la “oligarquía” elige mediante votación entre sus miembros, el juego al que jugará la comunidad entera. En la versión adaptativa, tanto el dictador como la oligarquía esta formada en cada turno por los individuos con mayor capital de toda la comunidad. El desarrollo de estos nuevos modelos es resultado de la colaboración entre B. Sotillo, E. García-Toraño, J.M.R. Parrondo y L.D. (Dinis *et al.*, 2005b).

Imaginemos que un individuo, el “dictador”, eligiese jugar a A o B según lo que más le convenga en cada turno y que impusiera su decisión al resto de la comunidad. Es decir, toda la comunidad habrá de jugar A, si el capital del dictador es un múltiplo de 3 y B en caso contrario. Lógicamente, el capital del dictador crecerá rápidamente, puesto que su estrategia coincide con la estrategia óptima para un jugador. No resulta sin embargo tan evidente lo que ocurrirá con el resto de jugadores, los “ciudadanos”, aunque podemos deducir aproximadamente su comportamiento mediante un argumento sencillo. Como la elección del juego no depende en absoluto del capital del resto de jugadores, a todos los efectos es como si jugaran una secuencia de aes y bes predeterminada. La secuencia que se les impone, es el resultado del camino aleatorio que realiza el dictador y por tanto tiene cierta aleatoriedad, si bien no es totalmente aleatoria.

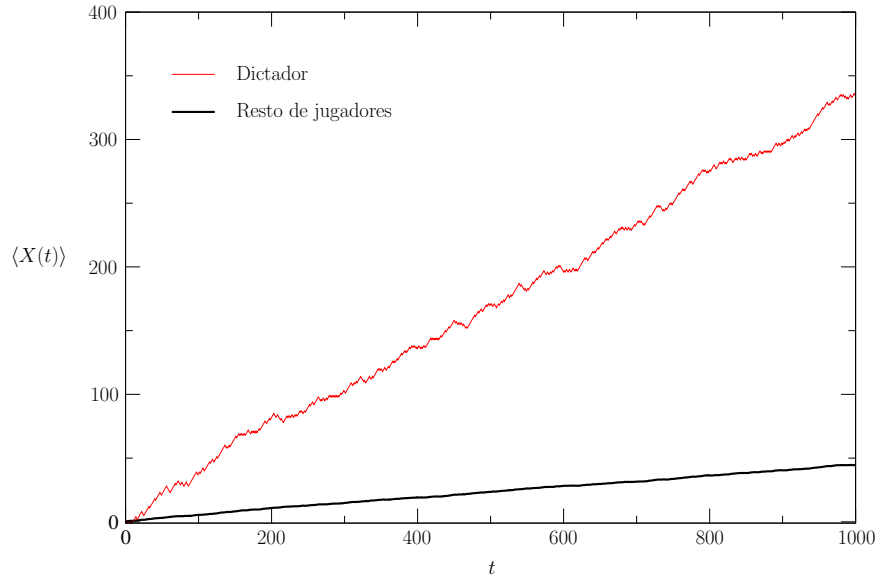


Figura 2.17: Evolución del capital para el dictador (trazo fino) y del capital medio de los otros 999 jugadores (trazo grueso).

Nótese por ejemplo que tras un juego de A, en el turno siguiente necesariamente se elegirá B, puesto que sólo se juega A en un múltiplo de 3 e inevitablemente en el turno siguiente el dictador no puede encontrarse ya en múltiplo de 3, puesto que ha tenido que avanzar o retroceder una posición. Sin embargo, tras un juego B se pueden dar ambas posibilidades, tanto que se cambie a A como que se repita B. De modo que el resto de la comunidad tendrá que jugar siguiendo una secuencia aproximadamente aleatoria con una alta frecuencia de juegos B. Si la frecuencia de bes no es demasiado elevada, una secuencia de este tipo puede producir ganancias moderadas en promedio, puesto que se da la alternancia de juegos suficiente.

La figura 2.17 representa resultados de simulación de este sistema, en los que se observa tanto las grandes ganancias del dictador como las ganancias promedio de los otros 999 jugadores que resultan mucho más moderadas. El lector puede comprobar que la pendiente media coincide aproximadamente con lo predicho por la solución analítica del modelo que detallamos en la sección 2.5.2.

El modelo se puede generalizar de forma que, en lugar de recaer la decisión en un solo individuo, el juego se elija por votación entre unos pocos individuos que constituyen la oligarquía. Como sabemos gracias al análisis del efecto del número finito de la sección 2.4.2, mientras el número total de oligarcas sea pequeño, la estrategia de la votación les resultará favorable. Por otra parte, de forma similar al caso del dictador, el resto de los jugadores también tendrán unas ganancias moderadas puesto que se verán obligados a jugar una secuencia

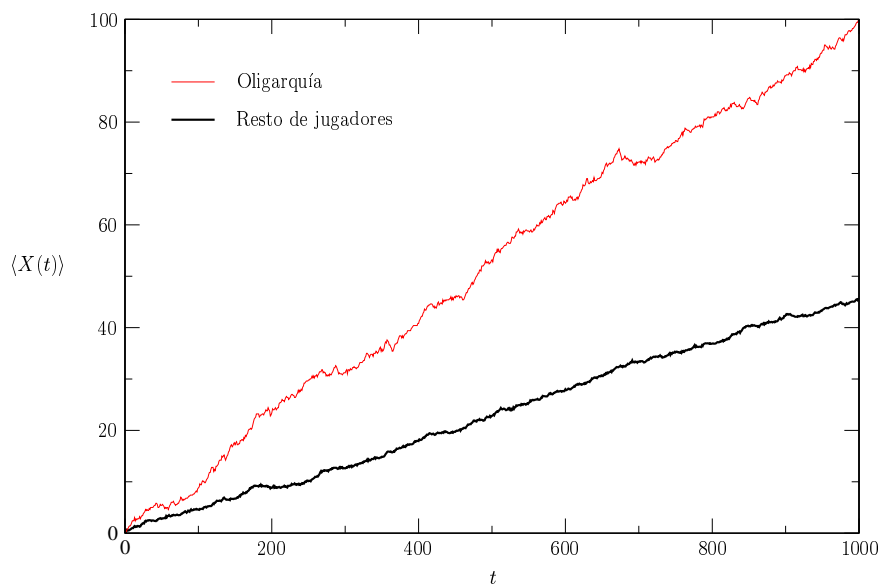


Figura 2.18: Evolución del capital medio de los 10 oligarcas (trazo fino) y de los otros 90 jugadores (trazo grueso).

más o menos aleatoria con una cierta alternancia entre ambos juegos, si bien la solución analítica en el caso de un número de oligarcas moderado resulta demasiado compleja. La figura 2.18 muestra los resultados de una simulación con 10 oligarcas y 90 ciudadanos.

Antes de pasar al análisis del modelo del dictador, resulta interesante resaltar que un conjunto similar de 1000 jugadores a los que se les permitiera elegir el juego por votación obtendría pérdidas sistemáticas, como hemos visto al analizar la versión democrática de los juegos. En un escenario en el que el capital representara una cierta medida del éxito de cada comunidad, este mecanismo podría ser responsable de la aparición de estrategias de grupo “dictatoriales”, en las que los grupos que ceden paulatinamente el poder de decisión a un grupo reducido o incluso a uno solo de los integrantes del grupo podrían desarrollarse por encima de las comunidades más democráticas, en las que la descoordinación de los objetivos individuales produce resultados indeseados. O dicho de otro modo, podría explicar que los individuos estuvieran dispuestos a soportar la “tiranía” puesto que al menos les produce cierta prosperidad. No obstante, las condiciones de este ejemplo son muy específicas, por lo que solo debe entenderse el modelo como ilustración de este tipo de mecanismos.

2.5.2 Análisis del modelo del dictador

Bastará con analizar la evolución del capital del dictador y de un ciudadano cualquiera para caracterizar la de todo el conjunto, puesto que todos los ciudadanos son independientes, de forma que el promedio del capital de un ciudadano resulta equivalente al promedio del capital de toda la ciudadanía. Llamemos que $X_d(t)$ y $X(t)$ al capital del dictador y al de un ciudadano respectivamente. El vector $Y(t)$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} X_d(t) \bmod 3 \\ X(t) \bmod 3 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

es una cadena de Markov que puede tomar los siguientes valores: (00), (01), (02), (10), (11), (12), (20), (21), (22). La matriz de transición entre los nueve estados es, si numeramos los estados en ese mismo orden:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{40} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{40} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{27}{40} & \frac{9}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{40} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{40} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{27}{40} & \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

según se deriva de las reglas de los juegos A y B y del hecho de que el dictador elige el juego siguiendo la estrategia avariciosa. Por ejemplo, la probabilidad de transición $\Pi_{6,2}$ desde el estado (01) (el número 2 en la lista) al estado (12) (el número 6) vale

$$\Pi_{6,2} = p_A(1 - p_A) = \frac{1}{4}, \quad (2.63)$$

puesto que el dictador en el estado inicial (01) tiene capital múltiplo de 3 y por tanto todos, dictador y jugadores, juegan A. Además, para pasar de (01) a (12) el dictador ha de ganar lo que sucede con probabilidad p_A y el otro jugador ha de perder, lo que sucede con $1 - p_A$, y de ahí la ecuación (2.63). Igualmente, la transición entre (21) y (02) se produce cuando ambos jugadores, dictador y ciudadano, ganan en el juego B y por tanto

$$\Pi_{3,8} = p_b^2 = \frac{9}{16} \quad (2.64)$$

ya que ambos jugarán con la moneda buena. La matriz estocástica Π posee un autovector de autovalor 1 que una vez normalizado corresponde a la distribución estacionaria que especifica las probabilidades de cada uno de los nueve estados

de $Y(t)$ en el límite de número de turnos suficientemente grande:

$$P_{st} = \frac{1}{13685449} \begin{pmatrix} 1759355 \\ 633035 \\ 2416011 \\ 1246210 \\ 1218764 \\ 1233796 \\ 1684790 \\ 1368644 \\ 2124844 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

La probabilidad de ganar p_{win} para el dictador o el ciudadano viene dada por el sumatorio a todos los estados del producto de la probabilidad de estar en cada estado por la probabilidad de ganar cuando el individuo se encuentra en dicho estado. Para el dictador tenemos

$$P_{win,dict} = p_A \sum_{i=1}^3 P_{st,i} + p_b \sum_{i=4}^9 P_{st,i} \quad (2.66)$$

puesto que el dictador gana con probabilidad p_A en los tres primeros estados y con p_b en el resto. Como resulta claro en esta expresión, el dictador evita completamente la moneda mala del juego B, por lo que su probabilidad de ganar es muy alta y sus ganancias crecen rápidamente. Los demás jugadores, se ven sin embargo obligados a jugar con la moneda mala del B en ciertas ocasiones lo que reduce su probabilidad de ganar. Más concretamente, la probabilidad de ganar para un jugador de la ciudadanía se escribe

$$P_{win,cit} = p_A \sum_{i=1}^3 P_{st,i} + p_m(P_{st,4} + P_{st,7}) + p_b(P_{st,5} + P_{st,6} + P_{st,8} + P_{st,9}) \quad (2.67)$$

En los estados 4 (10) y 7 (20) el ciudadano se encuentra con capital múltiplo de 3 y tiene que jugar al juego B puesto que lo determina el dictador, y por tanto en estos estados su probabilidad de ganar es la de la moneda mala p_m del juego B.

Finalmente, con las probabilidades de ganar podemos calcular la pendiente media del capital del dictador y de un jugador cualquiera en estado estacionario utilizando, como en el resto de ocasiones, que la ganancia media es $2p_{win} - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_d(t)}{t} &= 2P_{win,dict} - 1 = \frac{12}{37} = 0.324... \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} &= 2P_{win,cit} - 1 = \frac{628224}{13685449} = 0.0459... \end{aligned} \quad (2.68)$$

Estos valores coinciden aproximadamente con los valores de las pendientes de la ganancia del dictador y la ganancia media del resto de los jugadores representados en la figura 2.17 y correspondientes a simulaciones.

2.5.3 Dictadura y oligarquía adaptativas

En esta sección consideraremos una variación de los modelos anteriores, en los que el dictador o en general los miembros de la oligarquía, en lugar de consistir en un grupo de individuos predeterminado y permanente durante todo el juego, son elegidos de forma dinámica en el transcurso del mismo. En particular, analizaremos el efecto de elegir la oligarquía como los $M < N$ individuos con mayor capital en cada turno.

El comportamiento del modelo con dictador adaptativo no resulta demasiado diferente de su versión con dictador fijo. En el caso del dictador predeterminado, el capital del dictador evoluciona con una pendiente mucho mayor que la de la ciudadanía. Si se permite la actualización dinámica del dictador, tras unos turnos iniciales en los que sí ocurren ciertos cambios de dictador, finalmente el dictador acaba separándose de la masa y puesto que las pendientes del capital son tan diferentes la probabilidad de un nuevo cambio de dictador prácticamente se vuelve nula. De esta manera, en el estado estacionario ambos sistemas, dictador fijo y adaptativo resultan equivalentes.

En contra de este razonamiento se podría argüir que, dado que la comunidad está formada por un gran número de jugadores, la distribución de sus capitales se irá ensanchando a medida del número de turnos de forma que quizá alguno de los jugadores pudiera alcanzar al dictador. No obstante, como el capital promedio tanto del dictador como de la comunidad crecen de manera proporcional al número de turnos t , aunque con distinta pendiente, la diferencia entre ambos también crecerá de forma proporcional a t . Sin embargo, la anchura de la distribución de capitales en la ciudadanía crece tan solo con la raíz cuadrada de t , ya que el capital en los juegos se comporta como un caminante aleatorio⁴. De esta forma, una vez separados dictador y ciudadanía una cantidad suficiente, es poco probable que ningún ciudadano pueda volver a alcanzar al dictador.

La situación cambia al considerar la oligarquía. Si la oligarquía es suficientemente grande, la votación resulta ineficiente y el capital de la oligarquía no crece demasiado deprisa. Si la ciudadanía es suficientemente grande como para que los extremos de su distribución se encuentren poblados, puede darse el caso de que el periodo en el que se producen traspasos de individuos de uno a otro grupo se prolongue durante un gran número de turnos. De este modo, las diferencias respecto de la versión fija de la oligarquía pueden ser significativas.

La figura 2.19 muestra la evolución del capital medio de la oligarquía y el resto de la ciudadanía para 100 oligarcas y 900 ciudadanos tanto para la versión con oligarquía fija como adaptativa. Como sabemos, 100 individuos son sufi-

⁴En la imagen del capital como una red unidimensional, el juego A es claramente un caminante aleatorio. Se desplaza a la derecha con probabilidad dada por la probabilidad de ganar p_A y a la izquierda con $1 - p_A$ en cada turno. La distribución del capital en el turno t será una binomial de parámetro p_A con t sucesos totales, de donde la varianza es $\sigma^2 = p_A(1 - p_A)t$ y la anchura σ crece con \sqrt{t} . El juego B o la combinación aleatoria se comportan de forma similar una vez alcanzado el estado estacionario, salvo que la probabilidad de moverse hacia la derecha vendrá dada por la correspondiente probabilidad de ganar p_{win} . El capital seguirá también una binomial con t sucesos, y por tanto, su anchura es proporcional también a \sqrt{t} .

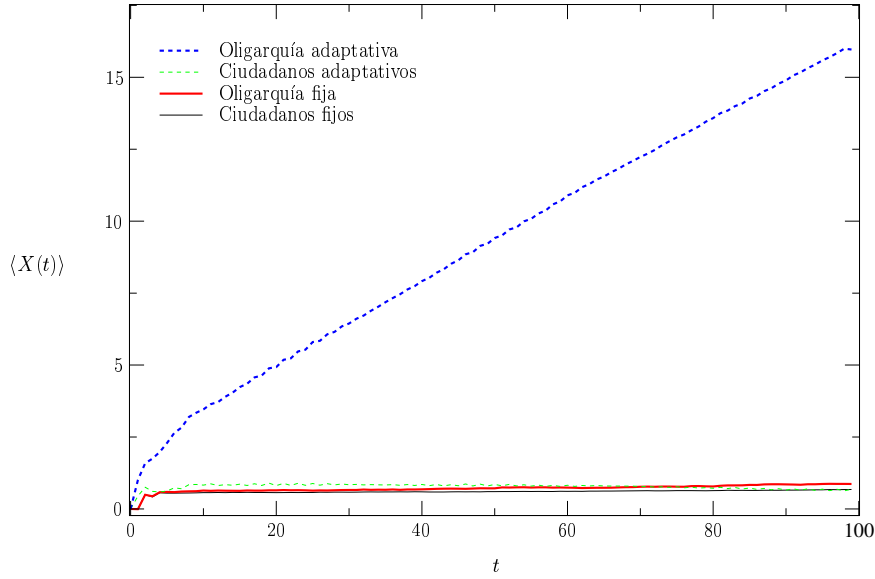


Figura 2.19: Comparación del capital promedio para los modelos de oligarquía fija y adaptativa con 100 oligarcas y 900 ciudadanos. Los trazos discontinuos corresponden al modelo adaptativo y los continuos al adaptativo. La oligarquía se encuentra siempre por encima de sus ciudadanos correspondientes. En el caso de la oligarquía adaptativa, el capital representado corresponde a la evolución temporal capital medio de los 100 individuos que componen la oligarquía en el último turno.

cientes como para que la votación resulte muy ineficiente y produzca escasos beneficios, de modo que el capital medio de la oligarquía fija crece muy lentamente, como de hecho se observa en la figura. Sin embargo, también observamos que el capital medio de la oligarquía adaptativa crece mucho más rápido.

Aunque será necesario un estudio más profundo del efecto, la eficiencia mucho mayor de la oligarquía adaptativa frente a la fija podría deberse a dos causas principalmente. Por un lado, la estrategia de la votación resulta ineficiente para conjuntos grandes porque la distribución de probabilidad $\pi(t)$ evoluciona hacia un estacionario en el que el juego B se elige con demasiada frecuencia y resulta perdedor. El trasvase de individuos que se produce en la oligarquía adaptativa podría hacer que la distribución del capital en la oligarquía tenga un estacionario diferente. Por otro, el hecho de escoger siempre los individuos con mayor capital podría provocar un cierto efecto ratchet, de modo que las fluctuaciones negativas del capital de los integrantes de la oligarquía sean suprimidas en cierta medida. Por ejemplo consideremos un jugador con capital $X(t)$ que no pertenece a la oligarquía, y uno con capital $X(t) + 1$ que es el oligarca con menor capital. Si el oligarca pierde y el jugador gana, el jugador pasa a ser oligarca con capital $X(t) + 1$ de modo que a los efectos del capital total de la oligarquía es como si

el oligarca hubiese mantenido su capital.

Optimización en los juegos paradójicos (I): La secuencia óptima

En los juegos paradójicos originales con un solo jugador, ¿cuál es la secuencia que produce mayores ganancias en promedio? En este capítulo, entenderemos como *secuencia* la secuencia de juegos A y B dada de antemano que se tiene que jugar y que no es modificable en función del estado del jugador ni de los resultados obtenidos hasta el momento. A pesar de la sencillez de los juegos, responder a esta cuestión no resulta fácil. Si jugamos durante n turnos, existen 2^n posibles secuencias, por lo que a medida que crece n , encontrar la secuencia óptima es cada vez más costoso. Behrends muestra no obstante en la referencia (Behrends, 2004b) que es posible encontrar una secuencia casi óptima en tiempo polinómico. Por otra parte, Vellerman y Wagon han calculado qué secuencia da las mayores ganancias en estado estacionario de entre todas las posibles de periodo no superior a 12 turnos, resultando ABABB (o cualquiera de sus permutaciones) como la mejor (Vellerman y Wagon, 2000). Si bien en este capítulo no se encontrará una demostración rigurosa, sí que mostraremos que efectivamente la secuencia ABABB resulta ser la que mayores ganancias proporciona en el estado estacionario de todas las posibles, esto es, cuando han de jugarse los juegos durante un número infinito de turnos, a través de un cálculo numérico basado en el principio de Bellman.

Para encontrar la secuencia de A y B óptima para un jugador procederemos de la siguiente manera. La evolución de las probabilidades de cada estado $(\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t)) \equiv \boldsymbol{\pi}(t)$ es equivalente totalmente a la evolución de la fracción de jugadores en cada estado en unos juegos colectivos con infinitos jugadores. De la misma manera la ganancia promedio en el primer caso coincide con la ganancia por jugador en el segundo. Encontremos entonces la estrategia óptima para n turnos del juego colectivo, esto es, qué juego hay que elegir en cada turno en función del estado del sistema $\boldsymbol{\pi}(t)$. Esto nos determina una secuencia de juegos A y B dependiendo de la condición inicial, cuya ganancia por jugador es precisamente es la máxima de todas las posibles. Por tanto, jugar esa secuencia

en el juego de un jugador proporciona la mayor ganancia promedio, que es lo que buscábamos originalmente. Por último, veremos que la estrategia óptima converge hacia una estrategia estacionaria cuando $n \rightarrow \infty$, lo que a su vez determina la secuencia que produce la máxima ganancia en el régimen estacionario de los juegos originales con un solo jugador.

3.1 El problema.

La ganancia esperada en un turno es, como vimos en el capítulo introductorio,

$$g(\pi_0(t)) \equiv \langle X(t+1) - X(t) \rangle = 2p_{\text{win}}(\pi_0(t)) - 1 \quad (3.1)$$

donde $p_{\text{win}}(\pi_0(t))$ es la probabilidad de ganar que depende (para el juego B, al menos) de la probabilidad de estar en el estado 0. De esta forma la ganancia acumulada hasta el turno n será

$$G_n = \sum_{t=1}^n g(t) \quad (3.2)$$

La probabilidad de ganar en cada turno dependerá del juego escogido y de $\pi_0(t)$ según

$$p_{\text{win}}(t) = \begin{cases} p_A \equiv p_{\text{winA}}, & \text{si escogemos A} \\ \pi_0(t)p_m + (1 - \pi_0(t))p_b \equiv p_{\text{winB}}(\pi_0), & \text{si jugamos a B} \end{cases} \quad (3.3)$$

y por tanto $g(t)$ tiene dos expresiones distintas según el juego elegido, pudiendo valer $g^A \equiv 2p_{\text{winA}} - 1$, o bien $g^B(\pi_0) \equiv 2p_{\text{winB}}(\pi_0) - 1$. Definamos un parámetro α_t que puede tomar el valor A o B en cada turno t de forma que cualquier secuencia de aes y bes viene dada por $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Entonces el problema se puede enunciar de la siguiente forma:

“Encontrar la secuencia de decisiones $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que hace máxima la ganancia G_n , con la restricción de que $\pi(t)$ evoluciona según las ecuaciones

$$\pi(t+1) = \Pi_A \pi(t), \text{ si } \alpha_t = A \quad (3.4)$$

o bien

$$\pi(t+1) = \Pi_B \pi(t), \text{ si } \alpha_t = B \text{ ”} \quad (3.5)$$

3.2 La solución formal

Supongamos primero que $n = 1$, esto es, que solo jugamos un turno. Llamemos $\hat{G}_1(\pi_0)$ al máximo de G_1 , ya que como veremos a continuación, solo depende del valor de π_0 que tenemos en este turno. Entonces,

$$\hat{G}_1(\pi_0) = \max_{\alpha_1} [g^A(1), g^B(1)] = \max_{\alpha_1} [2p_A - 1, 2(\pi_0 p_m + (1 - \pi_0)p_b) - 1]$$

Igualando las expresiones de las cuales queremos encontrar el máximo, obtenemos

$$2p_A - 1 = 2(\pi_0 p_m + (1 - \pi_0)p_b) - 1 \quad (3.6)$$

cuya solución nos da el valor crítico de π_0

$$\pi_{0c} \equiv \frac{p_A - p_b}{p_m - p_b} \quad (3.7)$$

de forma que si $\pi_0 \geq \pi_{0c}$ entonces la ganancia correspondiente al juego B es menor y conviene elegir el A, y viceversa. De esta forma, el valor máximo de la ganancia si solo se juega un turno es

$$\hat{G}_1(\pi_0) = \begin{cases} 2p_A - 1, & \text{si } \pi_0 \geq \pi_{0c} \ (\alpha_1 = A) \\ 2(\pi_0 p_m + (1 - \pi_0)p_b) - 1, & \text{si } \pi_0 < \pi_{0c} \ (\alpha_1 = B) \end{cases} \quad (3.8)$$

donde además se ha escrito entre paréntesis el juego que se ha de jugar para obtener dicha ganancia. Por otra parte, esto ya lo sabíamos porque así fue como construimos la estrategia avariciosa. No obstante, es importante resaltar que la función \hat{G}_1 no solo nos dice el juego que elegir cuando sólo se juega 1 turno, sino que también nos dice qué juego elegir cuando nos *queda* un solo turno por jugar, independientemente de lo ocurrido en turnos anteriores y única y exclusivamente en función de cual sea el valor de π_0 en este último turno. La idea clave de la solución a través del principio de Bellman es utilizar ese conocimiento de lo que hay que hacer en 1 paso para calcular lo que se ha de hacer cuando quedan 2 pasos, y así sucesivamente hasta completar todos los turnos.

Veamos entonces, ¿qué ocurre si hemos de jugar 2 pasos? En tal caso, tendremos que evaluar

$$\hat{G}_2(\pi_0, \pi_1) = \max_{\alpha_1, \alpha_2} [g(\pi_0(1)) + g(\pi_0(2))] \quad (3.9)$$

La función \hat{G}_2 depende de π_1 a través de su dependencia con $\pi_0(2)$, ya que esta fracción en el segundo turno viene determinada por $\pi_0(1)$ y $\pi_1(1)$ a través de las ecuaciones de evolución (3.4) y (3.5). Para aligerar la notación, escribamos la dependencia en π_0 y π_1 como $\hat{G}_2(\boldsymbol{\pi})$, ya que aunque $\boldsymbol{\pi}$ tiene tres componentes, solo dos de ellas son independientes debido a la normalización. Aunque \hat{G}_1 solo depende de π_0 , también lo escribiremos por sencillez y generalidad $\hat{G}_1(\boldsymbol{\pi})$.

Ahora bien, por el principio de Bellman, sabemos que la secuencia óptima de decisiones tiene la siguiente propiedad: sea cual sea el estado inicial $\boldsymbol{\pi}(1)$ y la primera decisión α_1 , las siguientes decisiones constituyen una secuencia óptima respecto del estado $\boldsymbol{\pi}(2)$ que resulta de la primera decisión α_1 . Es decir,

$$\hat{G}_2(\boldsymbol{\pi}(1)) = \max_{\alpha_1} \left[g(\pi_0(1)) + \max_{\alpha_2} g(\pi_0(2)) \right] \quad (3.10)$$

pero además, como $g(\pi_0(2))$ es la ganancia en el paso 2, que es ya el último paso, su máximo y el correspondiente α_2 vienen dados por la función \hat{G}_1 que nos da la ganancia máxima en un paso. De esta manera,

$$\hat{G}_2(\boldsymbol{\pi}(1)) = \max_{\alpha_1} \left[g(1) + \hat{G}_1(\boldsymbol{\pi}(2)) \right] \quad (3.11)$$

Como α_1 solo puede tomar dos valores, A o B, el máximo se encuentra hallando el máximo de las dos expresiones posibles para \hat{G}_2 al tomar $\alpha_1 = A$ o $\alpha_1 = B$. Eso sí, habrá que evaluar \hat{G}_1 en el valor de $\pi(2)$ que resulta tras jugar A o B en el paso 1, y por tanto, \hat{G}_2 solo depende del valor de $\pi(1)$. Esto es

$$\hat{G}_2(\pi(1)) = \max \left[g^A + \hat{G}_1(\Pi_A \pi(1)), g^B(\pi_0(1)) + \hat{G}_1(\Pi_B \pi(1)) \right] \quad (3.12)$$

A diferencia de la función para 1 paso, la función para dos pasos (y veremos que también para $n > 2$), resulta depender de ambas componentes libres de $\pi(1)$. Al igualar ambos términos, obtenemos entonces la relación que han de cumplir $\pi_0(1)$ y $\pi_1(1)$ para que elegir el juego A o B en el primer turno produzca la misma ganancia óptima en 2 turnos.

$$g^A + \hat{G}_1(\Pi_A \pi(1)) = g^B(\pi_0(1)) + \hat{G}_1(\Pi_B \pi(1)) \quad (3.13)$$

Escrito en coordenadas (π_0, π_1) , sin escribir ya el turno, obtenemos

$$\begin{aligned} 2p_A - 1 + \hat{G}_1(p_A(1 - \pi_0 - \pi_1) + (1 - p_A)\pi_1) = \\ 2(\pi_0 p_m + (1 - \pi_0)p_b) - 1 + \hat{G}_1(p_b(1 - \pi_0 - \pi_1) + (1 - p_b)\pi_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esta condición corresponde a una curva en el plano (π_0, π_1) , que resulta estar formada por dos segmentos rectos:

$$\pi_0 = 1/3, \text{ si } \pi_1 \leq 3/13, \quad (3.15)$$

$$\pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0 - \frac{7}{26}, \text{ si } \pi_1 > 3/13 \quad (3.16)$$

Por normalización, ha de cumplirse que $0 \leq \pi_0 + \pi_1 \leq 1$, por lo que la región accesible al sistema es el triángulo representado en la figura 3.1. Los segmentos (3.15) y (3.16) dividen la región accesible al sistema en dos partes. En la región de la derecha, hemos de escoger el juego A, y a la izquierda se ha de jugar B, cuando queden 2 pasos para el final del juego. Para comprobar esto, podemos tomar el vértice de abajo a la derecha en la figura 3.1 de coordenadas $(1, 0)$. Sustituyendo en la expresión (3.12) obtenemos

$$\hat{G}_2(1, 0) = \max \left[2p_A - 1 + \hat{G}_1(0), 2p_m - 1 + \hat{G}_1(0) \right] = \max(2p_A - 1, 2p_m - 1) \quad (3.17)$$

que al sustituir los valores de las probabilidades $p_A = 1/2$ y $p_m = 1/10$ queda

$$\hat{G}_2(1, 0) = \max(0, -8/10) = 0, \quad (3.18)$$

con lo que la ganancia correspondiente a empezar jugando A (y luego hacer lo que diga (3.8)) es mayor que empezar con B. Por continuidad, y dado que las líneas (3.15) y (3.16) son la única solución a (3.14), entonces en toda la región

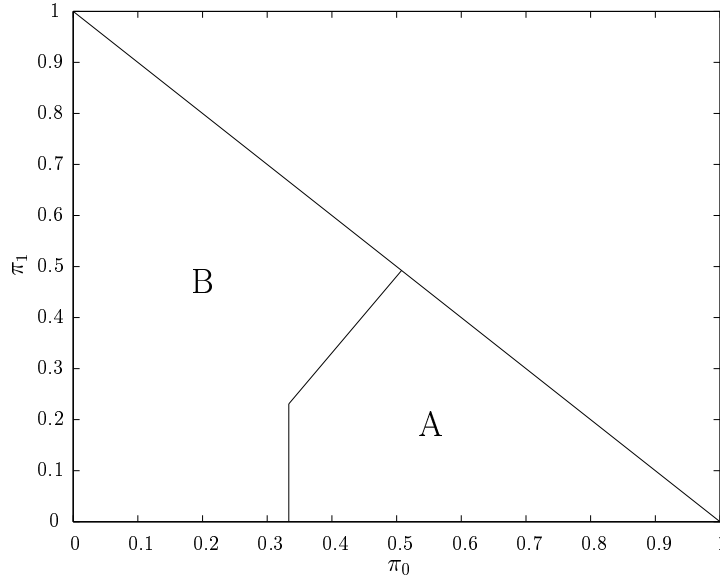


Figura 3.1: Regiones en las que hay jugar A o B cuando quedan 2 turnos para el final del juego.

de la derecha siempre será mejor jugar A. Análogamente se puede comprobar que en la región de la izquierda conviene jugar a B.

Finalmente, siguiendo un razonamiento similar al expuesto en esta sección, la expresión (3.12) es generalizable al caso en el que se juega un número n cualquiera de turnos, pudiéndose escribir la ganancia máxima para n turnos en función de la ganancia máxima para $n - 1$ turnos como

$$\hat{G}_n(\boldsymbol{\pi}) = \max \left[g^A + \hat{G}_{n-1}(\Pi_A \boldsymbol{\pi}), g^B(\pi_0) + \hat{G}_{n-1}(\Pi_B \boldsymbol{\pi}) \right] \quad (3.19)$$

donde $\boldsymbol{\pi}$ indica el vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, 1 - \pi_0 - \pi_1)$. De esta expresión se deduce que la curva que separa la región en la que conviene jugar A de la región en la que se debe jugar B viene dada por la solución de

$$g^A + \hat{G}_{n-1}(\Pi_A \boldsymbol{\pi}) = g^B(\pi_0) + \hat{G}_{n-1}(\Pi_B \boldsymbol{\pi}) \quad (3.20)$$

No obstante, los manipuladores simbólicos disponibles empiezan a devolver soluciones sin sentido a partir de $n \geq 3$, por lo que se hace necesaria la resolución numérica para la obtención de las curvas.

3.3 Resolución numérica (I): 10 o menos turnos

Para obtener numéricamente las curvas que separan las regiones en las que se elige A o B, basta con

1. Definir $\hat{G}_1(\pi_0)$ como en (3.8).
2. Definir de forma recursiva $\hat{G}_n(\pi_0, \pi_1)$ como en (3.19)
3. Resolver de forma numérica en π_1 la ecuación 3.20 para valores de π_0 desde 0 hasta que $\pi_0 + \pi_1 > 1$.

El método numérico utilizado para resolver la ecuación 3.20 ha de requerir solamente evaluaciones de \hat{G}_n y no de su derivada, por lo que se ha elegido el método de la bisección, basado en el teorema de Bolzano.

La figura 3.2 muestra los resultados de este cálculo para las líneas correspondientes a $n = 1, 2, \dots, 10$, es decir, para el último turno, los dos últimos turnos, etcétera hasta los 10 últimos turnos.

Esta manera de obtener las curvas es sencilla de programar, sin embargo, debido a que la evaluación de las funciones \hat{G}_n por recursión es muy costosa, no se puede calcular hasta más allá de unos 10 turnos en un tiempo razonable. Para conseguir un algoritmo más eficiente, se ha diseñado una forma aproximada de evaluar las funciones \hat{G}_n que evita la recursión. De esta forma conseguimos un algoritmo capaz de calcular las regiones en las que se debe jugar A o B en tiempo polinómico con el número de turnos, más concretamente, en tiempo *proporcional* al número n de turnos restantes hasta el final del juego. Este método se explica en la sección siguiente.

3.4 Resolución numérica (II): cualquier número de turnos

Como hemos visto en la sección 3.2, el máximo de la ganancia promedio alcanzable cuando quedan n turnos para el final del juego viene dado por la expresión (3.19), en la que se observa las dos propiedades que el algoritmo numérico deberá aprovechar. Primero, para cada punto del plano (π_0, π_1) , la expresión (3.19) nos permite decidir si elegir A o B cuando quedan n turnos según si la expresión correspondiente al juego A ($g^A + \hat{G}_{n-1}(\Pi_A \pi)$) es mayor que la correspondiente al juego B ($g^B + \hat{G}_{n-1}(\Pi_B \pi)$). Segundo, para decidir esto último, basta con evaluar la ganancia máxima para un turno menos ($n - 1$) en un determinado punto del plano. Utilizando estas dos propiedades, diseñamos el algoritmo que se detalla a continuación.

1. Generar una malla regular cuadrada que recubra el cuadrado de lado unidad del plano (π_0, π_1) . Llamaremos $(\Delta\pi_0, \Delta\pi_1)$ a la separación entre puntos consecutivos de la malla, y (π_0^i, π_1^j) a los puntos sobre la malla.

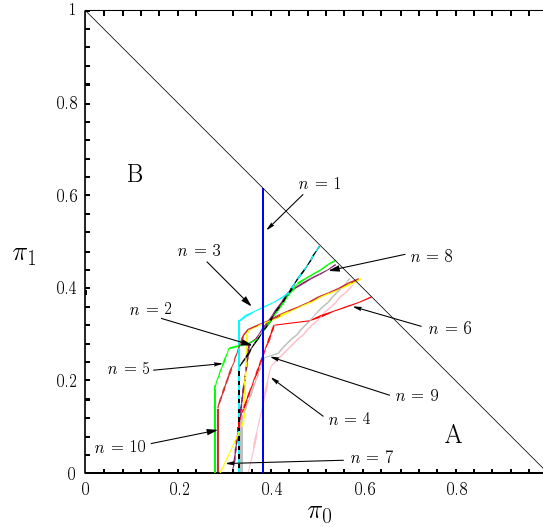


Figura 3.2: Líneas que separan las regiones en las que se debe elegir A o B, cuando quedan 10 pasos ($n = 10$), 9 pasos ($n = 9$), ... hasta cuando queda un paso solamente ($n = 1$). Cada línea está formada en realidad por en torno a 50 puntos (π_0, π_1) .

2. Tomar $n = 1$. Evaluar la función $\hat{G}_1(\pi_0)$ sobre los puntos de la malla, según (3.8).
3. La evaluación de \hat{G}_1 permite crear un mapa que relaciona cada punto de la malla que cae dentro del triángulo accesible al sistema con el juego óptimo.
4. Evaluar la función \hat{G}_n para el paso $n = 2$, sobre los puntos de la malla regular. Para ello, se necesitaría el valor de \hat{G}_{n-1} en puntos fuera de la malla donde no se conoce, dados por $(\pi_0^*, \pi_1^*) = \Pi_A(\pi_0^i, \pi_1^j)$ o bien $(\pi_0^*, \pi_1^*) = \Pi_B(\pi_0^i, \pi_1^j)$. Estos puntos han de caer dentro del triángulo accesible al sistema, por lo que siempre se encontrarán entre cuatro puntos de la malla. Utilizar la siguiente aproximación:

$$\hat{G}_{n-1}(\pi_0^*, \pi_1^*) \simeq \hat{G}_{n-1}(\lfloor \pi_0^*/\Delta\pi_0 \rfloor \Delta\pi_0, \lfloor \pi_1^*/\Delta\pi_1 \rfloor \Delta\pi_1) \quad (3.21)$$

Lo que equivale a aproximar \hat{G}_{n-1} sobre los puntos fuera de la malla por el valor de \hat{G}_{n-1} en el punto de la malla correspondiente al vértice de abajo y a la izquierda de los cuatro entre los que se encuentra el punto fuera de la malla. De esta manera además se consigue que el punto en el que se evalúa \hat{G}_{n-1} esté siempre dentro del triángulo accesible al sistema.

5. La evaluación de \hat{G}_n sobre la malla nos permite asignar a cada punto de la malla el juego A o B, dependiendo de si el máximo se ha alcanzado con la expresión correspondiente al juego A o B, respectivamente.

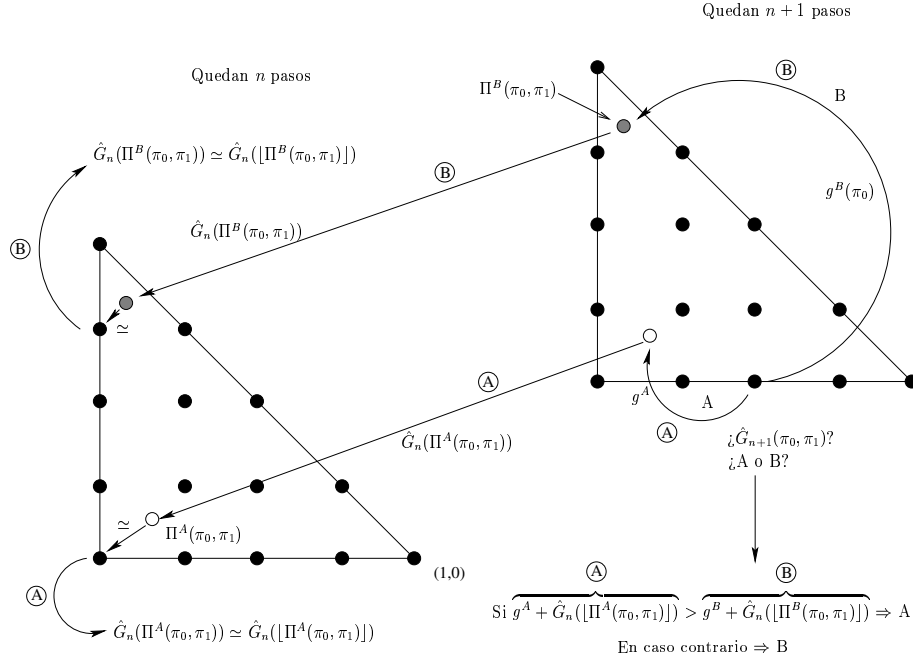


Figura 3.3: Esquema que muestra la evaluación de \hat{G}_{n+1} a partir de \hat{G}_n . Para cada punto de la malla, si el resultado a través de la rama \textcircled{A} es mayor que el correspondiente a la rama \textcircled{B} , entonces el juego óptimo en dicho punto es el A; en caso contrario, será el B.

6. Para evitar problemas de memoria, se puede desechar tanto el mapa correspondiente al paso $n - 1$ como la evaluación de \hat{G}_{n-1} .
7. Repetir los pasos 4 a 6 incrementando n en una unidad hasta llegar al número de turnos deseado.

La figura 3.3 representa esquemáticamente la evaluación de \hat{G}_{n+1} a partir de \hat{G}_n y la selección del juego óptimo para uno de los puntos de la malla.

3.5 Resultados

Las figuras 3.4 a 3.8 muestran los resultados de los mapas para una malla de 2000×2000 puntos para $n = 1$ hasta $n = 10$. Los resultados concuerdan con los obtenidos en la sección 3.3.

A continuación se muestran agrupados por parejas los mapas obtenidos con la misma malla para $(15,20)$, $(16,21)$, $(17,22)$, $(18,23)$ y $(19,24)$ pasos, en las figuras 3.9 a 3.13. Estas figuras ya muestran un comportamiento regular, repitiéndose indefinidamente 5 mapas diferentes, siempre en el mismo orden. A primera vista,

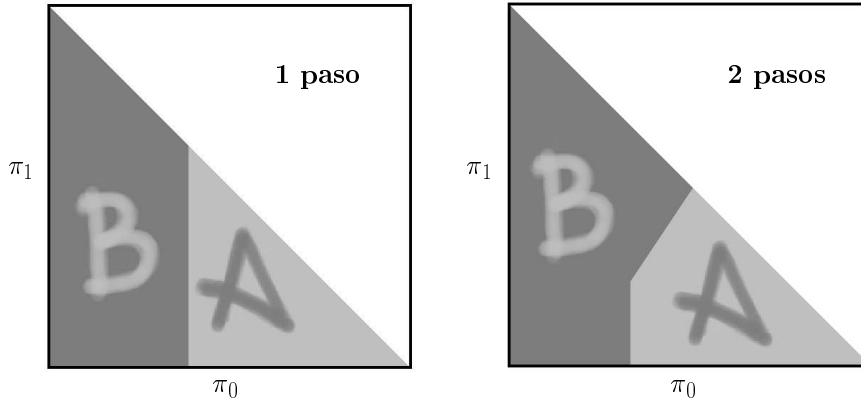


Figura 3.4: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando queda 1 turno (izquierda) o 2 turnos (derecha) para el final del juego.

las regiones de A y B son equivalentes cuando quedan 15, 20, 25, 30... pasos para el final del juego, e igualmente son equivalentes las de 16, 21, 26, 31..., etcétera. Aunque aquí solo se muestra la figura correspondiente a 10 pasos, las 5 figuras correspondientes a $n = 10, 11, 12, 13$ y 14 ya anticipan la secuencia, aunque aún muestran ciertas diferencias con sus correspondientes equivalentes para $n + 5$.

En realidad, incluso para $n \geq 15$, los mapas son todavía algo diferentes entre sí. No obstante, acaban convergiendo de manera que el mapa para $n + 5$ acaba reproduciendo punto por punto el mapa para n . Por ejemplo, para mallas de 16 millones de puntos, el mapa generado para $n = 200$ es exactamente igual al mapa para $n = 205$. En general, para una malla suficientemente refinada, las diferencias son pequeñas y se limitan a tan solo algunos puntos cercanos a la frontera, donde la ganancia máxima para ambos juegos es muy similar por definición, y resulta casi equivalente tomar un juego u otro.

En cualquier caso, el hecho de que converjan para un n suficientemente grande asegura que podemos obtener los 5 mapas que determinan la estrategia óptima en el estado estacionario, cuando aún quedan infinitos juegos para llegar al final. Si uno quiere asegurarse la máxima pendiente posible, deberá elegir el juego según lo que mandan los 5 mapas pero ordenados de forma inversa a la que se calcularon (pues n cuenta los turnos que quedan hasta el final del juego), y una vez se llegue al quinto de ellos, se vuelve a utilizar el primero, por ejemplo, 20, 19, 18, 17, 16, 20, 19, 18, 17, 16, ... El hecho de empezar por uno u otro mapa no cambiará la pendiente en el estado estacionario, aunque puede dar lugar a algunas diferencias en el comportamiento inicial del capital.

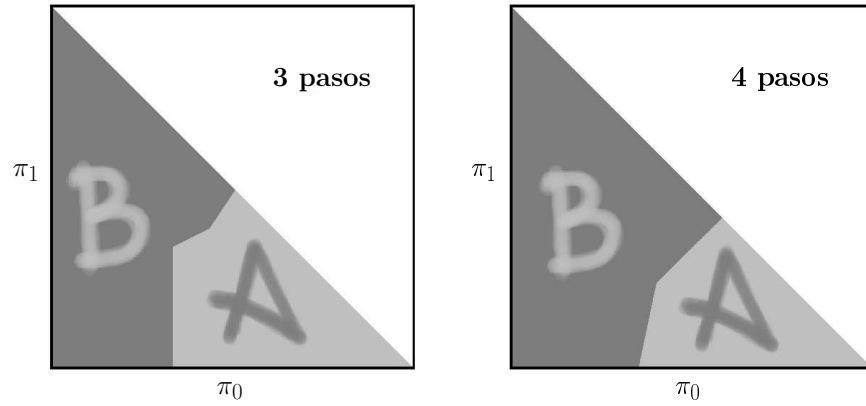


Figura 3.5: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 3 turnos (izquierda) o 4 turnos (derecha) para el final del juego.

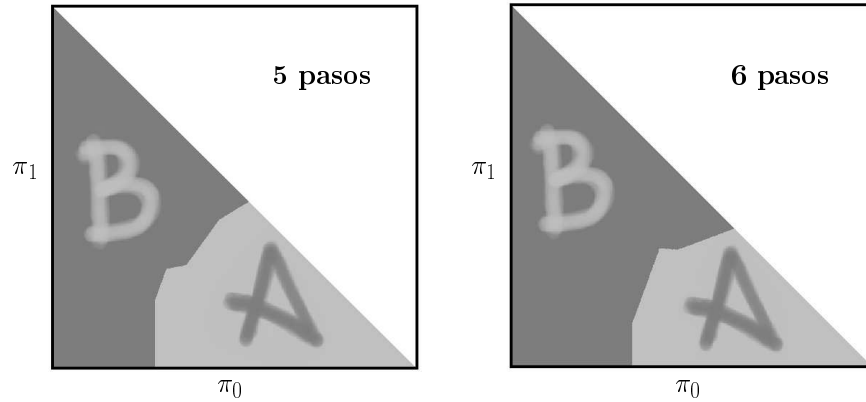


Figura 3.6: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 5 turnos (izquierda) o 6 turnos (derecha) para el final del juego.

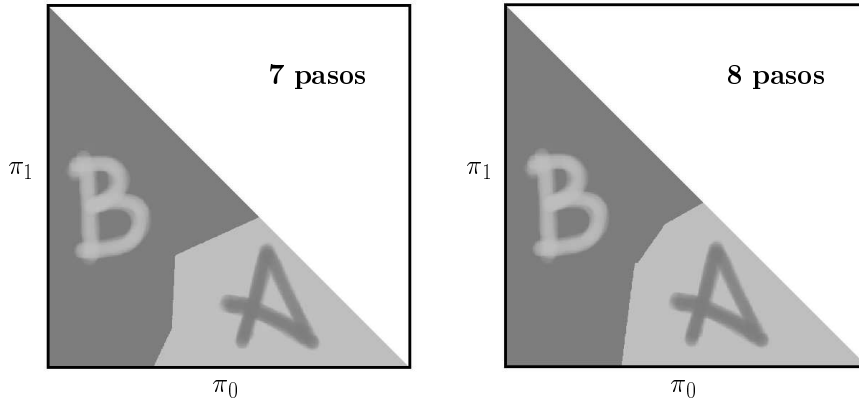


Figura 3.7: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 7 turnos (izquierda) o 8 turnos (derecha) para el final del juego.

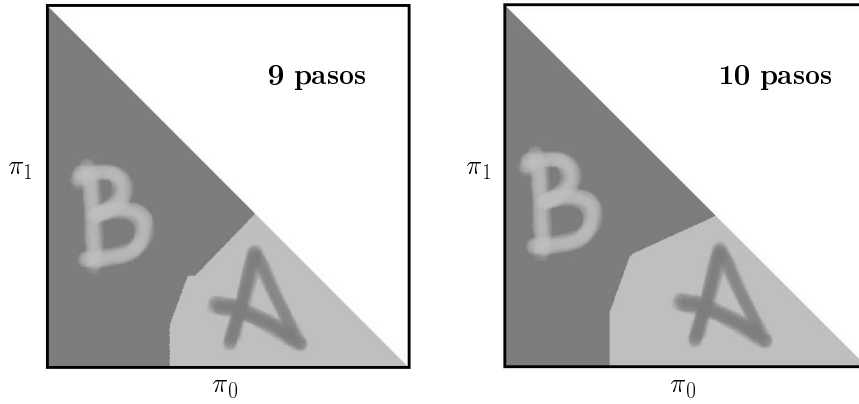


Figura 3.8: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 9 turnos (izquierda) o 10 turnos (derecha) para el final del juego.

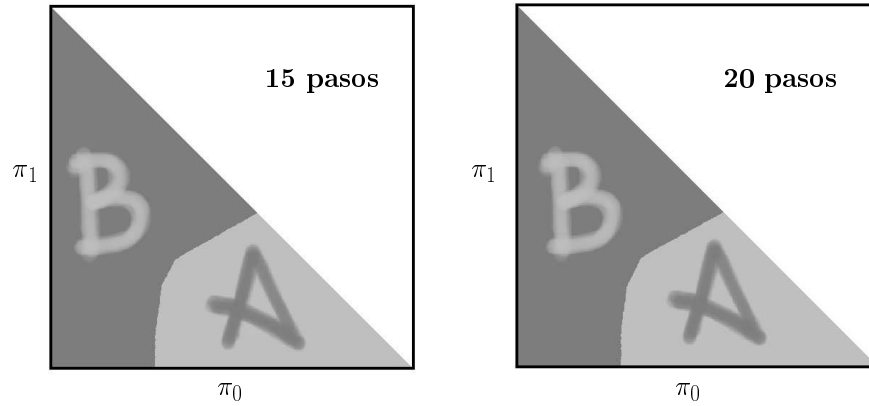


Figura 3.9: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 15 turnos (izquierda) o 20 turnos (derecha) para el final del juego.

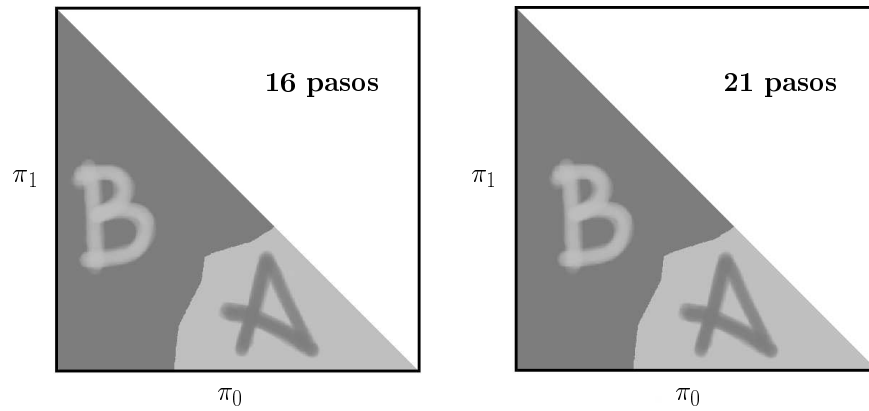


Figura 3.10: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 16 turnos (izquierda) o 21 turnos (derecha) para el final del juego.

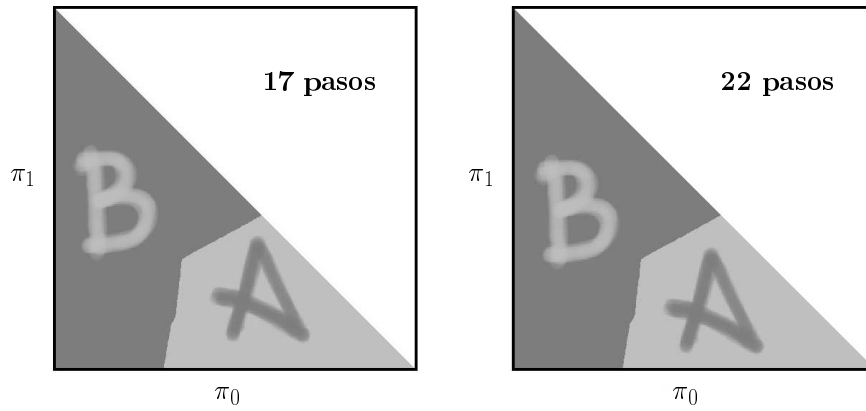


Figura 3.11: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 17 turnos (izquierda) o 22 turnos (derecha) para el final del juego.

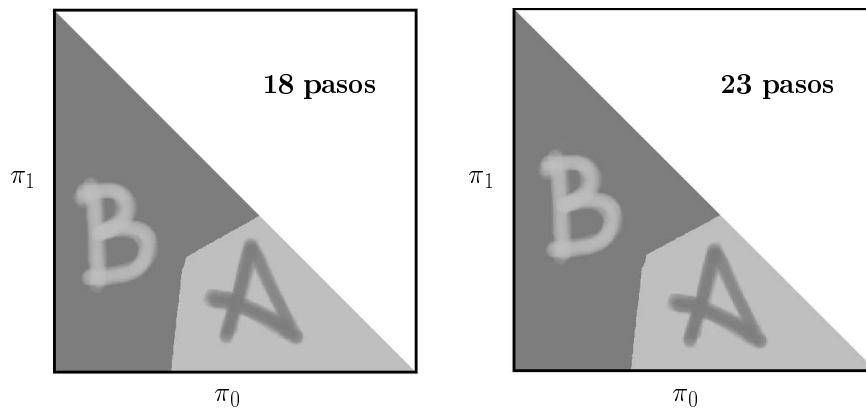


Figura 3.12: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 18 turnos (izquierda) o 23 turnos (derecha) para el final del juego.

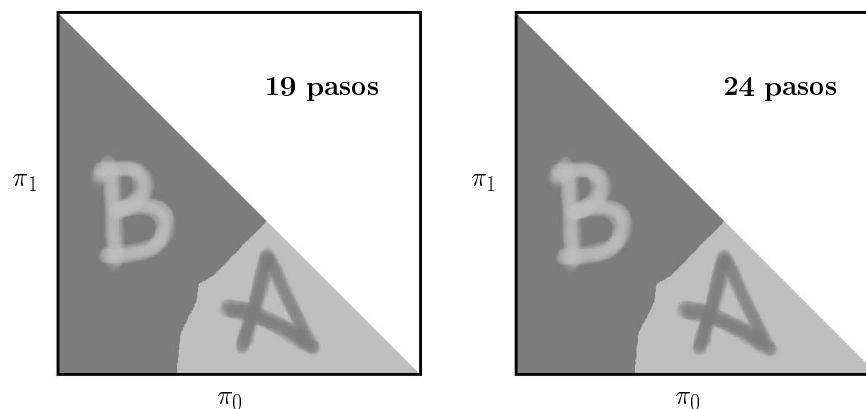


Figura 3.13: Regiones en las que hay jugar A o B para obtener la ganancia máxima cuando quedan 19 turnos (izquierda) o 24 turnos (derecha) para el final del juego.

3.6 La secuencia óptima para un solo jugador

Recuérdese que iniciamos este capítulo preguntándonos cuál es la secuencia que produce mayores ganancias una vez alcanzado su estado estacionario. Pues bien, según el resultado de la sección 3.5, cuando quedan aún un número infinito de turnos, si queremos obtener la mayor ganancia por jugador debemos jugar siguiendo la prescripción dada por los mapas 20,19,18,17 y 16 (por ejemplo) una y otra vez. Si uno actúa de esta manera, acaba jugando finalmente la secuencia ABABB de forma periódica, independientemente de la condición inicial. En concreto, se ha comprobado que si se utiliza la estrategia óptima la evolución de $\pi(t)$ es tal que converge rápidamente hacia el ciclo dado por los cinco puntos estacionarios de la secuencia ABABB. La evolución se ha calculado numéricamente para condiciones iniciales $(\pi_0(0), \pi_1(0))$ sobre una malla de celda cuadrada de tamaño 0.01, dejando evolucionar durante 100 turnos cada condición inicial. La figura 3.14 muestra los 5 últimos puntos de la evolución de cada una de las más de 5000 condiciones iniciales (sólo son válidas las que caen dentro del triángulo o sobre la frontera). Se ha comprobado que estos más de 25000 puntos se agrupan de 5 en 5 coincidiendo con el ciclo límite de ABABB dentro del margen de la precisión dada por el computador.

De esta forma, si uno se fija en el estado estacionario, es lo mismo seguir la prescripción óptima que jugar la secuencia ABABB de forma periódica. Ambas producen las misma pendiente para las ganancias. Por otra parte, vimos también al inicio del capítulo que la ganancia por jugador en los juegos colectivos con infinitos jugadores es equivalente a la ganancia promedio en el caso de un solo jugador, y por tanto, la secuencia ABABB es también la secuencia que produce mayores ganancias en el estado estacionario de los juegos paradójicos originales con un solo jugador.

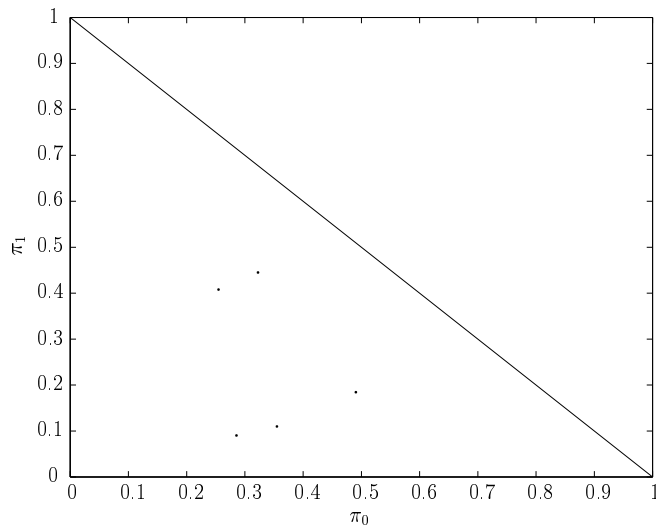


Figura 3.14: Los últimos 5 puntos de la evolución siguiendo la estrategia óptima dada por los mapas para $n = 20, 19, 18, 17, 16$ utilizados de forma periódica, para las más de 5000 condiciones iniciales distintas sobre el triángulo. Los más de 25000 puntos correspondientes se agrupan coincidiendo con los 5 puntos del ciclo estacionario de la secuencia ABABB dentro de la precisión dada por el computador.

Optimización en los juegos paradójicos (II): La estrategia óptima para N jugadores

El capítulo 3 responde a la pregunta de cuál es la secuencia óptima para los juegos originales con un jugador encontrando la estrategia óptima para infinitos jugadores en los juegos colectivos. En este capítulo veremos que es posible modificar el método descrito en el capítulo 3 para encontrar la estrategia óptima pero para un número finito de jugadores.

En el caso de N jugadores, el estado del sistema queda completamente determinado por el vector de fracciones de jugadores en cada uno de los estados posibles 0, 1 y 2. Es decir, $\pi(t) = (N_0, N_1, N_2)/N$, donde N_i es el número de jugadores cuyo capital módulo tres es i . De nuevo, por normalización $N_3 = N - N_1 - N_2$, por lo que basta con dar las 2 primeras componentes para determinar el estado del sistema.

Antes de continuar, es conveniente hacer notar que el estado *del sistema* o estado colectivo dado por $\pi(t) = (N_0, N_1, N_2)/N$ no ha de confundirse con el estado 0, 1 o 2 en el que se encuentra un determinado jugador atendiendo a si su capital módulo 3 es igual a 0, 1 o 2, respectivamente. Para ello, llamaremos a este último, estado *del capital* de un jugador o simplemente estado de un jugador.

Como hasta ahora, en este capítulo entenderemos por estrategia a la manera de escoger el juego A o B según el estado del sistema $\pi(t)$ y el número de turnos n que nos quedan por jugar. La estrategia óptima será aquella estrategia que proporcione mayores ganancias por jugador en promedio. El promedio ha de entenderse pues como un promedio de la ganancia por jugador sobre distintas realizaciones. Será interesante también encontrar la estrategia óptima en el estado estacionario, cuando aún quedan muchos turnos por jugar. La diferencia básica con respecto al método desarrollado en el capítulo 3 es que, si bien con infinitos jugadores la evolución de $\pi(t)$ se vuelve determinista (y está dada por las ecuaciones de evolución (3.4) y (3.5)), en el caso de N finito, las fracciones $\pi(t)$ evolucionan en el tiempo de forma estocástica.

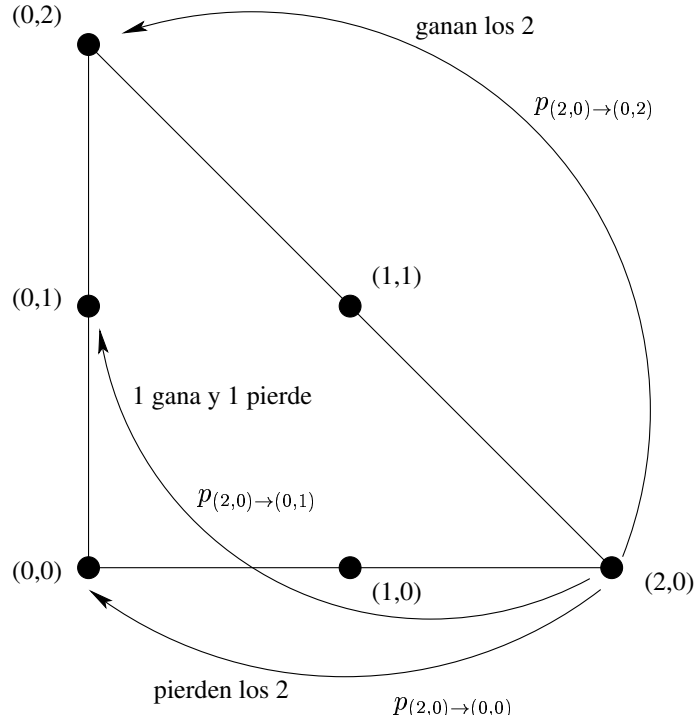


Figura 4.1: Los 6 estados posibles (N_0, N_1) para 2 jugadores. Se han marcado también las tres transiciones posibles desde el estado $(2, 0)$.

4.1 La solución formal

Por simplicidad tomaremos a partir de ahora como estado del sistema el dado por los números totales de jugadores en vez de las fracciones $\pi_N(t) \equiv N\pi(t) = (N_0, N_1, N_2)$. El estado $\pi(t)$ puede representarse entonces en el plano (N_0, N_1) al igual que se hacía para el sistema con infinitos jugadores en el plano (π_0, π_1) , con la salvedad de que ahora los estados accesibles al sistema son un conjunto discreto, ya que tanto N_0 como N_1 pueden tomar solo los valores $\{0, 1, 2, \dots, N\}$. En realidad, el número de configuraciones o estados distintos posibles compatibles con la restricción de que el número total de jugadores sea N es $(N+1)(N+2)/2$. En la figura 4.1 se han representado los 6 estados posibles $\{(2,0), (1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$, para 2 jugadores como un círculo negro.

El objetivo del capítulo es encontrar el juego que se ha de elegir cuando quedan n turnos para el final, en función del estado (N_0, N_1) que nos encontremos, de modo que la ganancia promedio al final de esos n turnos sea máxima. Para fijar ideas, tomemos un estado dado $(N_0, N_1) = (i, j)$. Para un solo turno, el promedio de la ganancia por jugador viene dada como siempre por $g^A = 2p_A - 1$ si elegimos el juego A y $g^B(i/N) = 2(i/Np_m + (1 - i/N)p_b) - 1$, si elegimos el

juego B, ya que en este caso $\pi_0 = i/N$. Para maximizar la ganancia promedio, hemos de elegir el juego de forma análoga a la ya calculada en (3.8). Esto es, la ganancia promedio por jugador máxima para un solo turno \hat{G}_1 , junto con el juego que hay que escoger, viene dada por

$$\hat{G}_1(i) = \begin{cases} 2p_A - 1, & \text{si } i/N \geq \pi_{0c} \text{ (elegir A)} \\ 2(\pi_0 p_m + (1 - \pi_0)p_b) - 1, & \text{si } i/N < \pi_{0c} \text{ (elegir B)} \end{cases} \quad (4.1)$$

Bastaría con hacer esto mismo para todo punto (i, j) de la malla para asociar a cada punto con su juego óptimo.

Podemos ahora tratar de encontrar el máximo de la ganancia promedio por jugador tras 2 pasos, $\hat{G}_2(i, j)$. Supongamos que de nuevo estamos en un punto dado de la malla (i, j) . En el primer turno, obtendremos una ganancia por jugador promedio de nuevo de g^A si elegimos el juego A y $g^B(i/N)$, si elegimos el juego B. Ahora bien, elijamos el juego que elijamos, de los N jugadores pueden ganar N de ellos, o $N - 1$, etcétera. De forma que hay varios estados (k, l) a los que podemos llegar desde el estado inicial (i, j) . Con las reglas de los juegos se pueden calcular tanto a qué estados (k, l) se puede pasar desde (i, j) , como la probabilidad $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A$ de que eso suceda para el juego A, o para el juego B, que llamaremos $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B$. Por supuesto, en caso de que no (k, l) no sea accesible desde (i, j) , bastará con tomar $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A = p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B = 0$.

Una vez que llegamos al estado (k, l) queda tan solo 1 paso más, por lo que sabemos que la ganancia promedio máxima que podemos conseguir será $\hat{G}_1(k/N)$, calculada ya en el paso anterior. Esta ganancia solo se obtiene con probabilidad $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A$ o $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B$, por lo que en media, en el último paso obtendremos la ganancia

$$\sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_1(k/N) \quad (4.2)$$

si elegimos A en el turno correspondiente a (i, j) o bien

$$\sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B \hat{G}_1(k/N) \quad (4.3)$$

si optamos por B. Los sumatorios pueden recorrer todos los estados finales (k, l) del sistema ya que hemos tomado como 0 las probabilidades de los saltos no permitidos.

Si a (4.2) y (4.3) les sumamos la ganancia conseguida en el primer turno, g^A o g^B según corresponda, tenemos

$$2p_A - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_1(k/N) \quad (4.4)$$

elijendo el juego A en el primer turno, y

$$2\left(\frac{i}{N}p_m + \left(1 - \frac{i}{N}\right)p_b\right) - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_1(k/N) \quad (4.5)$$

para el juego B. De esta forma, la ganancia máxima para dos turnos accesible desde (i, j) será (4.4) o (4.5), según cual de las dos expresiones sea mayor. Esto es

$$\hat{G}_2(i, j) = \max \left\{ 2p_A - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_1(k/N), \right. \\ \left. 2\left(\frac{i}{N}p_m + \left(1 - \frac{i}{N}\right)p_b\right) - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B \hat{G}_1(k/N) \right\} \quad (4.6)$$

expresión que determina el juego óptimo para 2 pasos que corresponde al estado (i, j) : para ello no hay más que asociarle el juego A si la expresión (4.6) alcanza su máximo para el primer término y B en caso de que lo haga para el segundo.

Generalizando el argumento para n y $n + 1$ pasos, tenemos que el máximo de la ganancia promedio por jugador vale

$$\hat{G}_{n+1}(i, j) = \max \left\{ 2p_A - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_n(k/N, l/N), \right. \\ \left. 2\left(\frac{i}{N}p_m + \left(1 - \frac{i}{N}\right)p_b\right) - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B \hat{G}_n(k/N, l/N) \right\} \quad (4.7)$$

y se alcanza eligiendo el juego A si el máximo viene dado por el primer elemento de la expresión (4.7) y B en caso contrario.

Para poder construir el algoritmo que encuentre la estrategia óptima, lo único que queda por hacer es encontrar las probabilidades de transición entre estados $p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}$ para un número arbitrario de jugadores.

4.2 Probabilidades de transición entre estados

Antes de escribir la expresión general de las probabilidades de transición, analicemos el caso particular para 2 jugadores que se muestra en la figura 4.1. Si atendemos al número de jugadores que ganan o pierden al jugarse un turno, las tres posibilidades que pueden suceder es que ganen los 2 jugadores, que pierdan ambos, o que gane uno y pierda el otro. Esto último a su vez puede ocurrir de dos maneras distintas puesto que los jugadores son independientes y distinguibles entre sí. Debido a que todos los jugadores ganan o pierden y ninguno permanece en el estado en el que estaba, hay estados del sistema (k, l) que no son accesibles desde otros estados. En el ejemplo de la figura 4.1 partimos del estado $(2, 0)$ por lo que ambos jugadores tienen capital módulo 3 igual a 0, es decir, en estado 0 del capital. Al jugar ambos, ganen o pierdan, dejarán de tener capital módulo 3 igual a 0 y puesto que no hay más jugadores, es obligatorio que en el siguiente turno no haya ningún jugador en el estado 0 de capital. Por tanto, las únicas

transiciones posibles desde $(2, 0)$ son a estados con $N_0 = 0$, como se indica en la figura. Para las transiciones que no pueden ocurrir tomaremos como es lógico probabilidad de transición nula para ambos juegos A, y B.

Veamos ahora cuánto valen las probabilidades de transición distintas de cero para el juego B primero y el A después, primero para unos ejemplos concretos representativos y luego para el caso general.

Tomemos por ejemplo la probabilidad de saltar de $(2, 0)$ a $(0, 2)$ para el caso con $N = 2$, que sucede cuando ambos jugadores ganan. La probabilidad de que 1 jugador gane jugando B en el estado de capital 0 es p_m , la probabilidad de ganar con la moneda mala. La probabilidad de que ganen los dos jugadores en el mismo turno, como son independientes será

$$p_{(2,0) \rightarrow (0,2)}^B = p_m^2 \quad (4.8)$$

Para que se produzca una transición desde $(2, 0)$ a $(1, 1)$ ha de ganar uno de los jugadores y perder el otro, lo que puede ocurrir de 2 formas distintas si consideramos los jugadores distinguibles. Por ejemplo, si juegan Albert y Brown, y ambos se encontraban con capital modulo 3 igual a 0, pasaremos de $(2, 0)$ a $(1, 1)$ tanto si gana Albert y pierde Brown como si ocurre lo contrario. La probabilidad de que gane Albert y pierda Brown cuando ambos juegan con la moneda mala es $p_m(1 - p_m)$. Para el suceso contrario, gane Brown y pierda Albert, la probabilidad es la misma, y como ambos sucesos producen la transición $(2, 0)$ a $(1, 1)$ y son sucesos excluyentes, la probabilidad de la transición es la suma de las probabilidades de los sucesos, esto es,

$$p_{(2,0) \rightarrow (1,1)}^B = 2p_m(1 - p_m) \quad (4.9)$$

Como muestra de otras transiciones en las que interviene la moneda buena calculemos $p_{(1,0) \rightarrow (0,2)}$. Para que se de esta transición, ha de ganar el jugador que se encuentra con capital en estado 0, lo que ocurre con probabilidad p_m de nuevo y que pierda el que se encuentra en estado 2, lo que ocurre con probabilidad $(1 - p_b)$, ya que al estar en estado 2 ha de utilizar la moneda buena. Por tanto, tenemos:

$$p_{(1,0) \rightarrow (0,2)}^B = p_m(1 - p_b) \quad (4.10)$$

Nótese que en este caso el suceso contrario, correspondiente a que gane el jugador en estado 2 y pierda el que se encuentra en estado 0, no contribuye a la probabilidad de transición $(1, 0) \rightarrow (0, 2)$, ya que en realidad produce transición de $(1, 0)$ a $(1, 0)$.

Por último las probabilidades de transición para el juego A se hallan simplemente substituyendo, en las expresiones para B, p_m y p_b por p_A , la probabilidad de ganar en el juego A para cualquier estado.

En el caso general con N jugadores, podemos construir las probabilidades de transición de manera análoga. Una manera sistemática de proceder es de nuevo prestar atención a cuántos de esos N jugadores ganan (el resto pierden), dependiendo de cuántos de ellos se encuentran en cada uno de los tres estados posibles del capital. Aunque para determinar el estado basta dar N_0 y

N_1 , el procedimiento quedará más claro haciendo explícito N_2 . Sea entonces el estado (N_0, N_1, N_2) , y g_0, g_1, g_2 el número de jugadores en estado 0, 1, o 2, respectivamente, que ganan. Por conservación de los jugadores, g_0 puede tomar los valores $g_0 = N_0, N_0 - 1, \dots, 0$. De igual forma, $g_1 = N_1, N_1 - 1, \dots, 0$, y $g_2 = N_2, N_2 - 1, \dots, 0$.

Si ganan g_0, g_1, g_2 pasaremos del estado (N_0, N_1, N_2) al estado $(g_2 + N_1 - g_1, g_0 + N_2 - g_2, g_1 + N_0 - g_0)$. La probabilidad de que habiendo (N_0, N_1, N_2) jugadores, ganen g_0, g_1, g_2 de ellos respectivamente (y pierdan el resto) es, para el juego B,

$$\binom{N_0}{g_0} p_m^{g_0} (1 - p_m)^{N_0 - g_0} \binom{N_1}{g_1} p_b^{g_1} (1 - p_b)^{N_1 - g_1} \binom{N_2}{g_2} p_b^{g_2} (1 - p_b)^{N_2 - g_2} \quad (4.11)$$

El número combinatorio $\binom{N_0}{g_0}$ representa el número de maneras distintas que hay de que ganen g_0 jugadores y pierdan $N_0 - g_0$ de un total de N_0 , y análogamente para $\binom{N_1}{g_1}$ y $\binom{N_2}{g_2}$.

No obstante, la probabilidad de transición de (N_0, N_1, N_2) a $(g_2 + N_1 - g_1, g_0 + N_2 - g_2, g_1 + N_0 - g_0)$ no viene dada por la expresión (4.11), ya que es posible que con otros valores distintos g_0, g_1, g_2 pasemos desde el mismo estado inicial al mismo estado final. Esto es, sean otros números g_0^*, g_1^*, g_2^* de los cuales alguno es distinto a g_0, g_1, g_2 , respectivamente, pero que dan el mismo estado final. Estos números g_0^*, g_1^*, g_2^* representan un suceso que también produce una transición de (N_0, N_1, N_2) a $(g_2 + N_1 - g_1, g_0 + N_2 - g_2, g_1 + N_0 - g_0)$, pero que es excluyente del anterior y cuya probabilidad viene dada por la misma expresión (4.11) substituyendo los g 's por los g^* 's. Como son sucesos excluyentes, ambos contribuyen aditivamente a la probabilidad de transición de (N_0, N_1, N_2) a $(g_2 + N_1 - g_1, g_0 + N_2 - g_2, g_1 + N_0 - g_0)$.

Por tanto, la probabilidad de salto a un nuevo estado (L_0, L_1, L_2) , para el juego B, $p_{(N_0, N_1) \rightarrow (L_0, L_1)}^B$ vendrá dada por la suma de la expresión (4.11) para todos los valores de g_0, g_1, g_2 compatibles con el estado final, esto es, que cumplan

$$(g_2 + N_1 - g_1, g_0 + N_2 - g_2, g_1 + N_0 - g_0) = (L_0, L_1, L_2) \quad (4.12)$$

Es decir, para el juego B,

$$\begin{aligned} p_{(N_0, N_1) \rightarrow (L_0, L_1)}^B &= \\ &= \sum_{g_0, g_1, g_2} \binom{N_0}{g_0} p_m^{g_0} (1 - p_m)^{N_0 - g_0} \binom{N_1}{g_1} p_b^{g_1} (1 - p_b)^{N_1 - g_1} \binom{N_2}{g_2} p_b^{g_2} (1 - p_b)^{N_2 - g_2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $N_2 = N - N_0 - N_1$ y la suma se extiende a todos los g_0, g_1, g_2 que cumplan (4.12), además de $0 \leq g_0 \leq N_0, 0 \leq g_1 \leq N_1$ y $0 \leq g_2 \leq N_2$. Para el juego A, basta con substituir p_m y p_b por p_A .

Podemos resumir el proceso de calcular las probabilidades de transición entre todos los estados posibles para N jugadores en el siguiente algoritmo:

1. Asignar cero a todas las probabilidades de transición.
2. Realizar un bucle a todos los valores posibles de (N_0, N_1, N_2) compatibles con $N_0 + N_1 + N_2 = N$.
3. Un bucle a todos los g_0, g_1, g_2 que cumplan $0 \leq g_0 \leq N_0, 0 \leq g_1 \leq N_1$ y $0 \leq g_2 \leq N_2$.
4. Averiguar a qué estado final (L_0, L_1) contribuye el actual conjunto g_0, g_1, g_2 , según (4.12).
5. Evaluar la expresión (4.11) y asignar el resultado a una variable auxiliar p_{aux} .
6. $p_{(N_0, N_1) \rightarrow (L_0, L_1)} = p_{(N_0, N_1) \rightarrow (L_0, L_1)} + p_{\text{aux}}$.

4.3 El algoritmo

Una vez calculada la matriz de transiciones, podemos resolver el problema utilizando las expresiones de la sección 4.1. Para obtener el juego óptimo para N jugadores, dependiendo del estado colectivo (N_0, N_1) , cuando quedan t turnos para el final debemos

1. Tomar $n = 1$.
2. Evaluar para cada estado (N_0, N_1) la función que da la ganancia máxima a un paso, $\hat{G}_1(N_0)$, según la expresión (4.1). Esta evaluación permite además asignar un juego óptimo a cada estado cuando queda tan solo un paso.
3. Evaluar las siguientes expresiones para cada punto

$$G^A = 2p_A - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^A \hat{G}_n(k/N, l/N) \quad (4.14)$$

y

$$G^B = 2 \left(\frac{N_0}{N} p_m + \left(1 - \frac{N_0}{N}\right) p_b \right) - 1 + \sum_{(k,l)} p_{(i,j) \rightarrow (k,l)}^B \hat{G}_n(k/N, l/N) \quad (4.15)$$

4. Asignar a cada punto (N_0, N_1) el juego óptimo para n según

$$\begin{cases} A & \text{si } G^A \geq G^B \\ B & \text{si } G^A < G^B \end{cases} \quad (4.16)$$

5. Evaluar la ganancia máxima para $n + 1$ como

$$\hat{G}_{n+1}(N_0, N_1) = \begin{cases} G^A & \text{si } G^A \geq G^B \\ G^B & \text{si } G^A < G^B \end{cases} \quad (4.17)$$

6. Tomar $n = n + 1$ y repetir los pasos de 3 a 6 hasta que hayamos calculado para $n = t$.

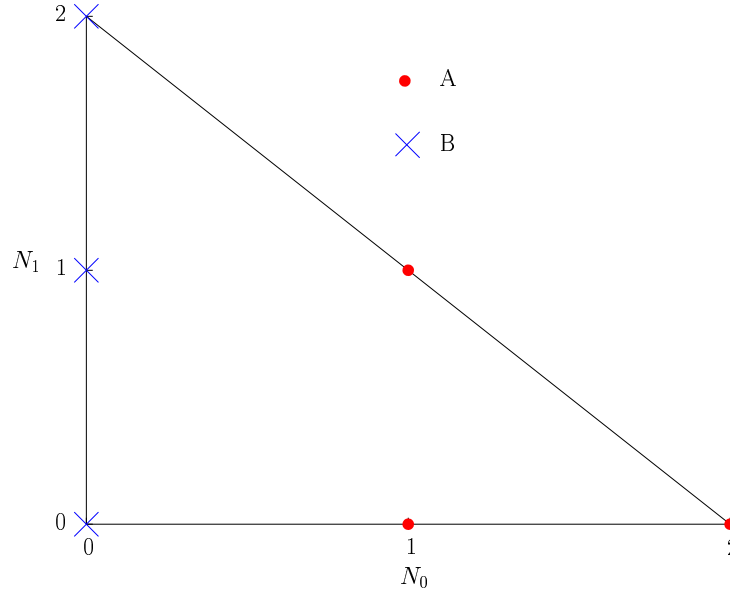


Figura 4.2: Estrategia o elección óptima para 2 jugadores para cualquier número de turnos restantes: escoger el juego A en los estados marcados con un punto (●) y el juego B en los marcados con un aspa (×). Para 2 jugadores, la estrategia óptima coincide con la estrategia avariciosa.

4.4 Resultados

En esta sección se muestran los resultados más relevantes para el caso de número finito de jugadores.

Como comprobación, se han calculado las estrategias óptimas para $N = 2$ y $N = 3$, comprobando que el resultado es el mismo que el obtenido por Cleuren y Van den Broeck mediante cálculo analítico (Cleuren y Van den Broeck, 2004). Para $N = 2$ los citados autores encuentran que la estrategia óptima para 2 jugadores en estado estacionario coincide con la estrategia avariciosa. La figura 4.2 muestra el resultado del cálculo mediante el principio de Bellman. El resultado es independiente del número de turnos restantes y puesto que $1/2$ es mayor que $5/13$, la estrategia representada en dicha figura es efectivamente la estrategia avariciosa, que maximiza la ganancia en cada turno. Para 3 jugadores comprobamos que el resultado para $n \geq 5$ también coincide con lo calculado por Cleuren y Van den Broeck para el estado estacionario y que muestra (ver figura 4.3) que la estrategia avariciosa no es en general la óptima a más largo plazo. Para 3 jugadores lo óptimo (cuando quedan al menos 5 turnos para el final) consiste en elegir A en el estado $(1, 0)$ mientras que la estrategia avariciosa elegiría B. En el resto de estados ambas estrategias coinciden.

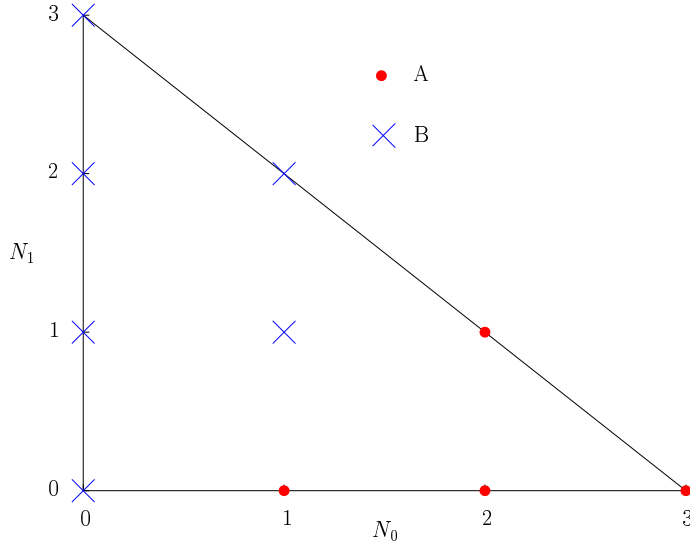


Figura 4.3: Estrategia óptima para 3 jugadores en el estado estacionario: escoger el juego A en los estados marcados con un punto (●) y el juego B en los marcados con un aspa (×). Se diferencia de la avariciosa tan solo en el estado (1,0).

Una vez comprobado que los resultados numéricos coinciden con los cálculos analíticos disponibles, mostraremos algunos resultados para un mayor número de jugadores, en particular, para $N = 4, 10$ y 100 . Comprobamos en la figura 4.4 que la estrategia óptima vuelve a ser la estrategia avariciosa, a pesar de que no lo era para $N = 3$. Probablemente ello se deba a que tanto $1/2$ como $1/4$, los valores admisibles de π_0 más cercanos al valor crítico $5/13$, se encuentran demasiado alejados de éste. Nótese que para cualquier número de jugadores si el valor de π_0 es suficientemente grande (pequeño), siempre se escogerá A (B), puesto que la diferencia de ganancias en ese primer turno es demasiado grande como para que se pueda compensar en sucesivos turnos. Por eso, toda estrategia óptima tiene su frontera en la región intermedia del diagrama. A medida que el número de jugadores aumenta, los mapas obtenidos para los últimos turnos ($n = 1, 2, 3, \dots$) se van pareciendo cada vez más a aquellos obtenidos para $N \rightarrow \infty$ también para número pequeño de turnos. En las figuras 4.5 a 4.9 se ha representado el resultado para los últimos 10 turnos para 100 jugadores. Para evitar la acumulación de puntos, se han representado estos resultados para 100 jugadores en forma de regiones en el plano $(\pi_0, \pi_1) = (N_0, N_1)/100$. Además, ello permite la comparación con las figuras 3.4 a 3.8, que resultan muy semejantes aproximadamente hasta $n = 4$ y luego son al menos parecidas.

No obstante, en el caso de número finito de jugadores, la estrategia óptima acaba convergiendo a un solo mapa a medida que crece n , a diferencia de lo que

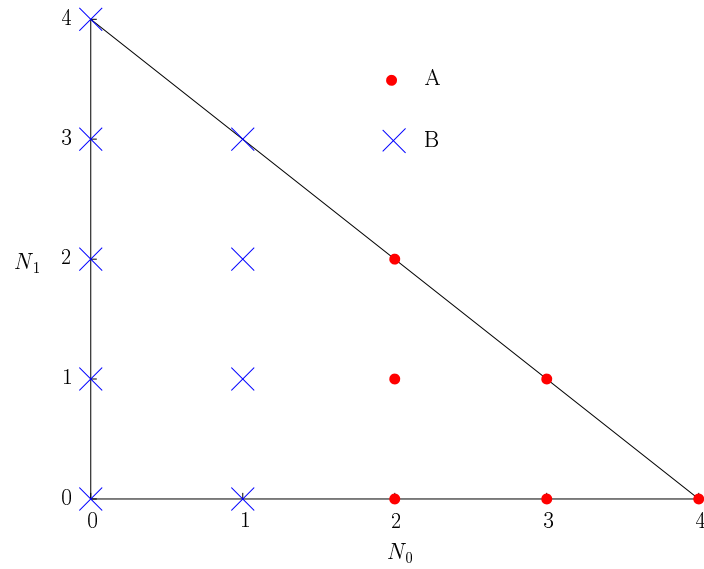


Figura 4.4: Estrategia óptima para 4 jugadores y cualquier número de turnos restantes: escoger el juego A en los estados marcados con un punto (\bullet) y el juego B en los marcados con un aspa (\times). Coincide con la avariciosa.

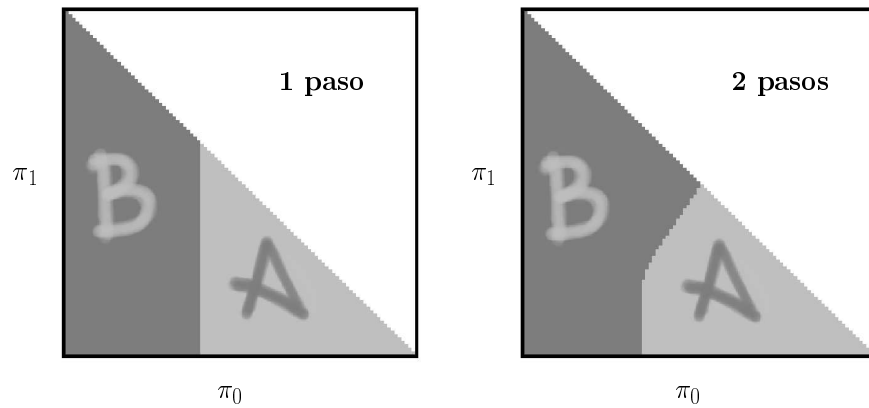


Figura 4.5: Estrategia óptima para 100 jugadores en el último turno (izquierda) y cuando quedan 2 turnos (derecha): elegir A en la región clara y B en la oscura.

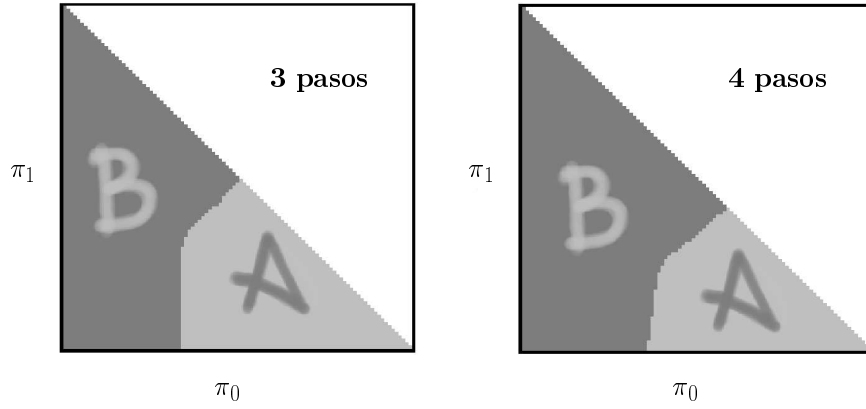


Figura 4.6: Estrategia óptima para 100 jugadores cuando quedan 3 turnos (izquierda) y 4 turnos (derecha): elegir A en la región clara y B en la oscura.

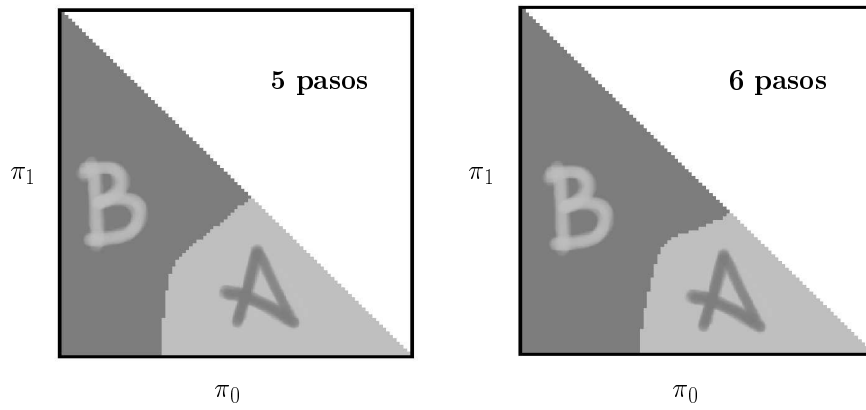


Figura 4.7: Estrategia óptima para 100 jugadores cuando quedan 5 turnos (izquierda) y 6 turnos (derecha): elegir A en la región clara y B en la oscura.

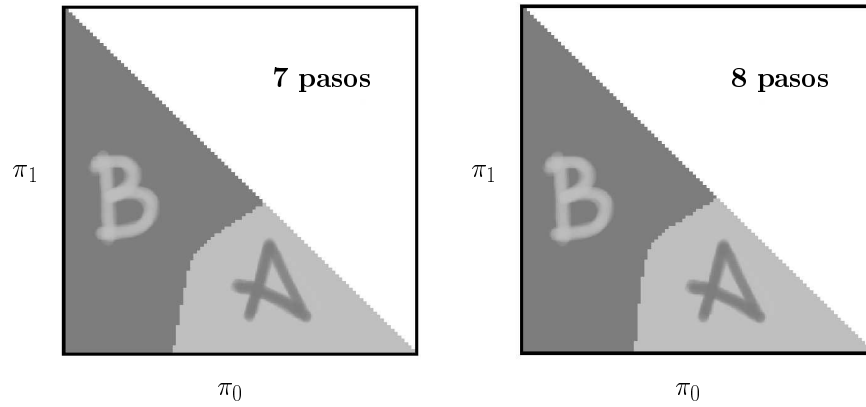


Figura 4.8: Estrategia óptima para 100 jugadores cuando quedan 7 turnos (izquierda) y 8 turnos (derecha): elegir A en la región clara y B en la oscura.

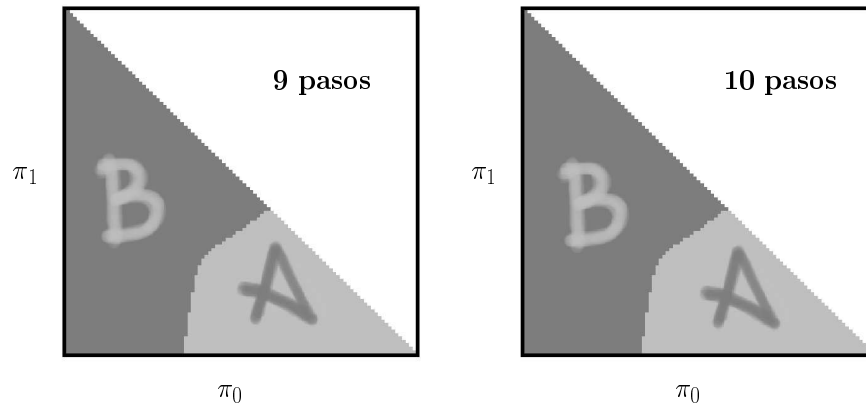


Figura 4.9: Estrategia óptima para 100 jugadores cuando quedan 9 turnos (izquierda) y 10 turnos (derecha): elegir A en la región clara y B en la oscura.

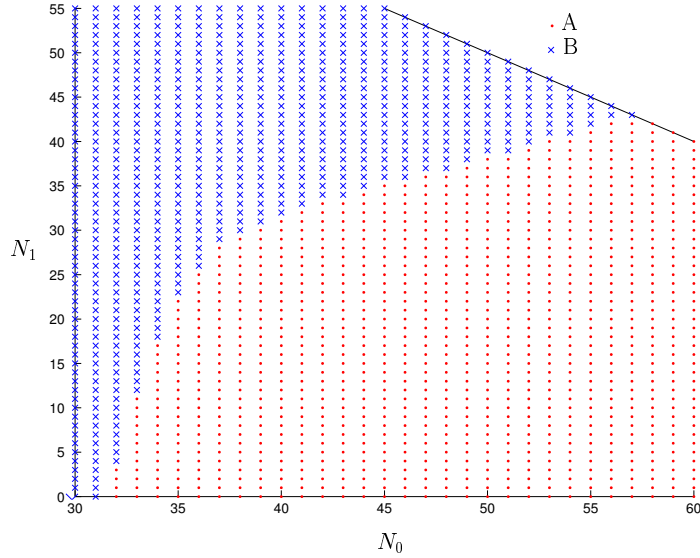


Figura 4.10: Estrategia óptima para 100 jugadores cuando quedan 100 pasos: escoger el juego A en los estados marcados con un punto (•) y el juego B en los marcados con un aspa (×). Sólo se muestra la región cercana a la frontera.

ocurría con infinitos jugadores que obteníamos 5 mapas. La estrategia óptima para 100 jugadores en el estado estacionario está dada por un único mapa, cuya región cercana a la frontera se ha representado en 4.10

La explicación reside probablemente en el hecho de que para infinitos jugadores la evolución es totalmente determinista mientras que para un número finito de jugadores es fluctuante. Dicho de otro modo, para $N \rightarrow \infty$, lo que ocurra en el último paso está relacionado directamente con lo que ocurre en el paso actual, sea cual sea el número de pasos que queden. Por tanto, la estrategia varía dependiendo del número de pasos aunque queden muchos pasos todavía. Utilizando un punto de vista poco correcto quizá pero intuitivo, la estrategia óptima “sabe” cuántos turnos quedan exactamente y decide en consecuencia. Por ejemplo, la estrategia óptima distingue si quedan 100 o 101 turnos, 1000 o 1001, etcétera.

Por el contrario, para N finito, la evolución ya no es determinista sino ruidosa. Debido a ello, dado el estado actual, los estados en siguientes turnos estarán relacionados con el estado en el turno actual en cierta medida, pero a medida que miramos turnos más separados, los estados se van descorrelacionando. De esta manera, sólo cuando quedan pocos turnos (n pequeño) la estrategia óptima es capaz de “ver” o “detectar” el final, y cambiar de mapa para tenerlo en cuenta.

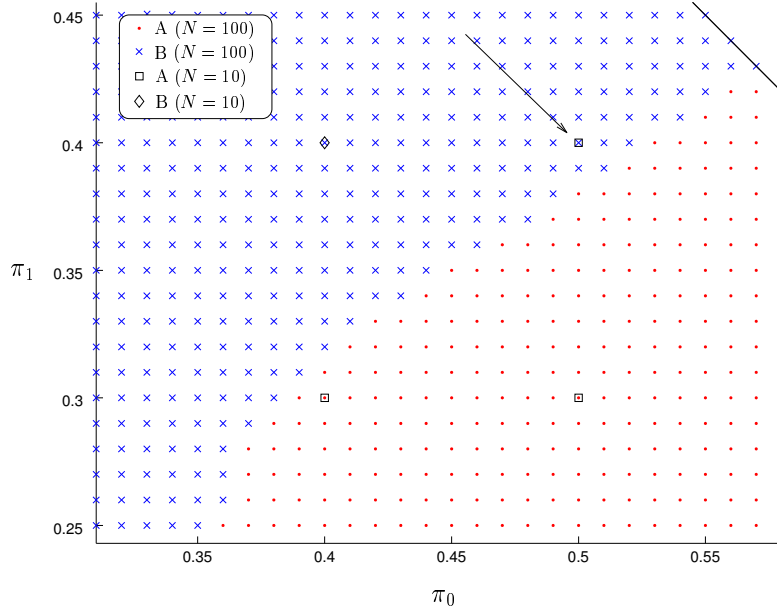


Figura 4.11: Estrategia óptima para 10 y 100 jugadores. Para 100 jugadores, elegir A en los estados marcados con un punto (\bullet) y B en los marcados con aspa (\times). Para 10 jugadores, elegir A en los marcados con un cuadrado (\square) y B en los marcados con un rombo (\diamond). La flecha señala un estado $(\pi_0, \pi_1) = (0.5, 0.4)$ donde las dos estrategias difieren.

Por último, la solución para N finito nos permite responder a la pregunta de si existe o no una estrategia que proporcione la ganancia óptima estacionaria sea cual sea el número de jugadores. Esto es, ¿existe una frontera entre las regiones A y B que tal que si se usa para cualquier número de jugadores se obtiene la estrategia óptima? La respuesta, como se puede apreciar en la figura 4.11, es negativa. Dicha figura muestra en detalle una cierta región del plano (π_0, π_1) donde se ha representado el mapa para 10 y 100 jugadores simultáneamente; para ello es necesario representar las fracciones de jugadores ($\pi_0 = N_0/N, \pi_1 = N_1/N$) y no los totales. En la figura se ha señalado mediante una flecha un punto en el que la estrategia óptima para $N = 10$ indica jugar A, mientras que para $N = 100$ se juega B en ese mismo punto y en todos los que lo rodean, por lo que es imposible con una misma curva o frontera, obtener el comportamiento óptimo para ambos casos $N = 10$ y $N = 100$. En otros casos ($N = 25$ y $N = 100$, por ejemplo) las discrepancias observadas incluyen un mayor número de puntos. No obstante, utilizando cualquier curva que separe la región A de la región B para $N = 100$, se obtendrá un resultado muy próximo al óptimo para todo $N \leq 100$.

Control en la “flashing ratchet”

En la “flashing ratchet” descrita en la introducción, el potencial de forma de dientes de sierra (figura 5.1) se conecta y desconecta siguiendo un protocolo periódico o aleatorio. Como vimos, con cualquiera de estos dos simples protocolos se consigue rectificar las fluctuaciones térmicas, obteniéndose un cierto flujo de partículas incluso en contra de un pequeño gradiente global o fuerza externa.

En este capítulo estudiaremos lo que ocurre si se permite que el encendido y apagado del potencial sea controlado por un agente externo que toma su decisión en función del estado del sistema. En la terminología usual de sistemas de control, los protocolos que dependen del estado del sistema que se ha de controlar se conocen como protocolos de bucle cerrado (*closed-loop*) o retroalimentados (*feedback control*). Nosotros abordaremos el análisis de dos protocolos de este último tipo (el criterio sobre la fuerza y el criterio basado en umbrales) en los que el agente controlador basa su decisión en las posiciones que ocupan las partículas en cada instante. El análisis mostrará que el efecto del control resulta bastante inesperado cuando se permite el control en sistemas con gran número de partículas brownianas a pesar de que las partículas no colisionan ni interaccionan de forma directa.

El capítulo se organiza así: en la sección 5.1 se propone un protocolo para elegir el estado del potencial de forma que se maximice el flujo de partículas instantáneo y se estudian sus efectos a largo plazo en función del número de partículas que componen el sistema. Mostraremos que a pesar de que este protocolo es óptimo para una partícula, produce menor flujo que un protocolo periódico o aleatorio cuando el número de partículas es suficientemente grande. La sección 5.2 muestra cómo modificar el anterior protocolo de manera que resulte casi tan bueno como el óptimo para una partícula pero que reproduzca el comportamiento del mejor protocolo periódico posible cuando el número de partículas es muy grande.

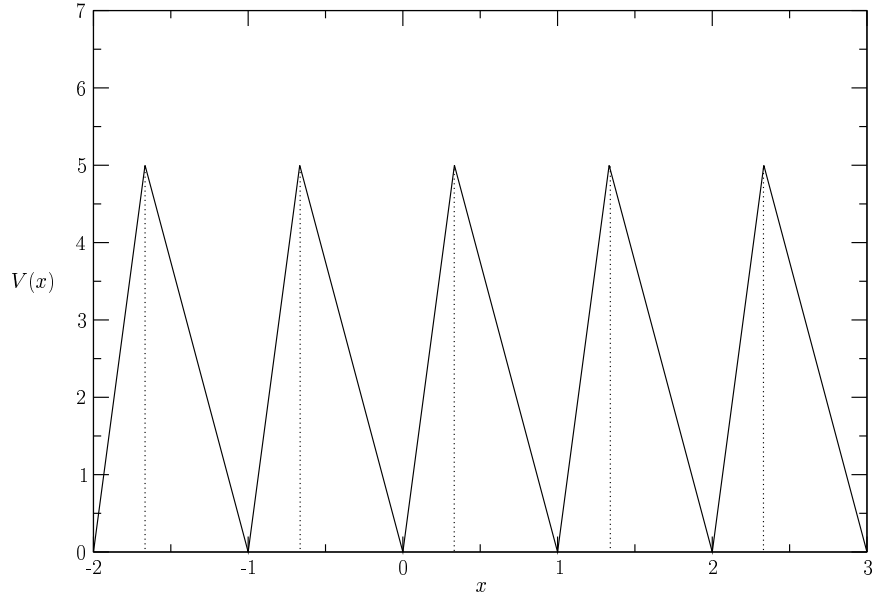


Figura 5.1: Potencial asimétrico de dientes de sierra al que se ven sometidas las partículas brownianas. En unidades $L = 1$, $D = 1$ y $kT = 1$, los parámetros del potencial valen $V_0 = 5$ y $a = 1/3$.

5.1 Criterio sobre la fuerza

5.1.1 Motivación: el control de una partícula.

Si encendemos y apagamos de forma periódica un potencial de dientes de sierra como el de la figura 5.1 al que se ven sometidas las partículas brownianas que forman parte de la flashing ratchet, conseguiremos rectificar parte de las fluctuaciones térmicas que les afectan e inducir un cierto movimiento sistemático en la dirección que indica el tramo largo del potencial, en este caso, hacia la derecha.

No obstante, si consideramos el caso de una partícula de la cual conocemos en todo momento la posición, podemos diseñar fácilmente un protocolo de control que produce mayor flujo. Para mover la partícula hacia los valores positivos de la coordenada x , basta con conectar el potencial cuando este produzca una fuerza positiva (tramo largo), y desconectarlo cuando la fuerza sea negativa (tramo corto) dejando que la partícula difunda libremente. Esta elección supone tomar en cada momento el estado del potencial que hace máxima la fuerza sobre la partícula debida al potencial y por tanto también la velocidad instantánea de la partícula, como se demuestra si describimos la dinámica de la partícula browniana mediante ecuaciones de Langevin. Si el potencial se encuentra encendido,

entonces la posición de la partícula verifica:

$$\gamma \dot{x}(t) = F_{\text{sierra}}(x) + \xi(t), \quad (5.1)$$

siendo $F_{\text{sierra}}(x) = -\frac{dV}{dx}$, la fuerza debida al potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} \frac{V_0}{a} \frac{x}{L} & \text{si } 0 \leq \frac{x}{L} \leq a \\ -\frac{V_0}{(1-a)} \left(\frac{x}{L} - a \right) + V_0 & \text{si } a \leq \frac{x}{L} \leq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

extendiéndose de forma periódica para el resto de valores de x . Si el potencial está desconectado, la ecuación se escribe

$$\gamma \dot{x}(t) = \xi(t). \quad (5.3)$$

En ambos casos $\xi(t)$ es un ruido blanco gaussiano de media nula y correlación

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\gamma kT \delta(t - t') \quad (5.4)$$

que representa la fuerza que siente la partícula debido a la agitación térmica. Podemos condensar ambas ecuaciones de movimiento en una sola de la forma

$$\gamma \dot{x}(t) = \alpha(t) F_{\text{sierra}}(x) + \xi(t), \quad (5.5)$$

tomando $\alpha(t)$ como un parámetro cuyo valor es 1 si el potencial está encendido y 0 si está apagado.

El protocolo de control propuesto consiste en tomar $\alpha(x(t)) = 1$ si $F_{\text{sierra}}(x)$ es mayor que cero y $\alpha(x(t)) = 0$ si es menor, lo que equivale a

$$\alpha(x) F_{\text{sierra}}(x) = \max[F_{\text{sierra}}(x), 0]. \quad (5.6)$$

En tal caso, la ecuación de movimiento se escribe

$$\gamma \dot{x}(t) = \max[F_{\text{sierra}}(x), 0] + \xi(t) \quad (5.7)$$

Como el término de ruido no depende del estado del potencial tenemos

$$\gamma \dot{x}(t) = \max[F_{\text{sierra}}(x) + \xi(t), \xi(t)] \quad (5.8)$$

de donde se deduce que si aplicamos el control, la velocidad instantánea toma en todo momento instante el mayor de los dos valores posibles.

Puesto que la partícula siempre sufre una fuerza positiva o nula debida al potencial al aplicar el control, parece claro que su velocidad promedio será positiva. Además, es razonable pensar que la velocidad de la partícula será mayor que aquella que se puede alcanzar encendiendo el potencial de forma periódica. Por un lado, mientras se está arrastrando la partícula hacia la derecha, no se desconecta el potencial hasta que la partícula avanza hasta el siguiente pozo del potencial, cosa que si puede ocurrir cuando el potencial se conecta de forma periódica. Por otra parte, el criterio de conexión basado en el signo de la fuerza mejora también el paso difusivo en el que se soslaya la barrera de potencial. Para

explicar este efecto de forma más clara, conviene recordar primero el mecanismo por el cual se rectifican las fluctuaciones en la flashing ratchet original. Cuando el potencial se conecta y desconecta periódicamente, la barrera de potencial se consigue traspasar mediante difusión cuando el potencial se encuentra apagado. En esta mitad del periodo, siempre que no sea demasiado larga, puede darse una de las tres situaciones siguientes:

1. La partícula se desplaza hacia la izquierda. Cuando el potencial se conecta de nuevo, se desplaza hasta el pozo del que partió.
2. La partícula se desplaza a la derecha pero no llega a superar el tramo corto antes de que el potencial se vuelva a conectar, con lo que retrocederá hasta el mínimo del potencial.
3. La partícula se desplaza lo suficiente hacia la derecha como para superar el tramo corto y cuando el potencial se conecta de nuevo es arrastrada hacia el pozo de potencial siguiente.

El criterio de conexión basado en la fuerza elimina por completo la posibilidad de que ocurra 2. Además la rectificación que se produce en las situaciones 1 y 3 se produce en este caso mucho más rápidamente ya que el potencial se conecta de forma inmediata en cuanto la partícula entra en el tramo largo, al contrario que en la ratchet periódica, en la que se espera a completar el periodo de desconexión. Todo ello contribuye a que el tramo corto se supere en promedio más rápidamente.

Estos dos efectos inducen a pensar que el control proporciona una mayor velocidad de la partícula que la obtenida mediante la conexión y desconexión periódica, lo que se confirma a través de simulaciones. Por ejemplo, para una partícula con coeficiente de fricción $\gamma = 1$, en un potencial de dientes de sierra de altura $5kT$ y moderadamente asimétrico (el tramo largo es dos veces el tramo corto) se obtiene mediante el control una velocidad promedio unas 10 veces mayor que la máxima alcanzable a través de un protocolo de conexión periódico.

Podemos analizar con mayor profundidad el caso de una partícula si tenemos en cuenta que es completamente equivalente al movimiento de una partícula browniana en un potencial efectivo aperiódico como el de la figura 5.2, que estuviera siempre encendido. Parece bastante claro que una partícula browniana sometida a un potencial como ese presentará una velocidad positiva en promedio, una vez alcanzado el régimen estacionario, ya que el potencial muestra una pendiente negativa global. El potencial efectivo permite calcular la velocidad promedio resolviendo la ecuación de Fokker-Planck correspondiente, como se explica en las secciones siguientes.

5.1.2 Potencial efectivo

Consideremos una partícula browniana descrita por la ecuación de Langevin

$$\gamma \dot{x}(t) = F_{\text{control}}(x) + \xi(t), \quad (5.9)$$

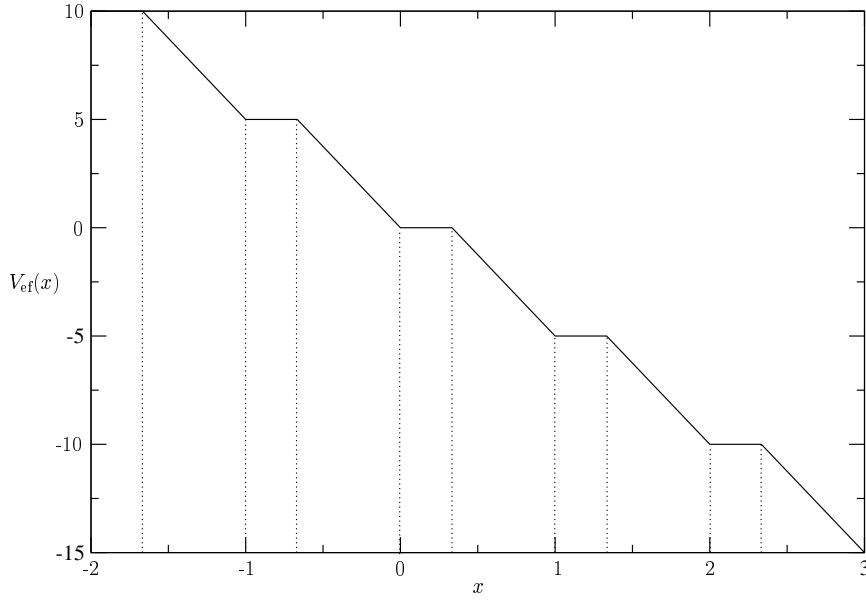


Figura 5.2: Potencial efectivo para una partícula. La fuerza que se deriva del potencial efectivo constantemente conectado resulta totalmente equivalente a la fuerza resultante si el potencial de sierra original se conecta o desconecta de modo que se maximice la velocidad instantánea de la partícula.

donde $F_{\text{control}}(x)$ es la fuerza que actúa sobre la partícula sometida al potencial de dientes de sierra $V(x)$ que se enciende y apaga según el protocolo de control propuesto en la sección anterior. Es decir,

$$F_{\text{control}}(x) = \alpha(x)F_{\text{sierra}}(x) \quad (5.10)$$

con

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } F_{\text{sierra}}(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } F_{\text{sierra}}(x) < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Utilizando la definición del potencial (5.2) se puede escribir $\alpha(x)$ en función únicamente de la posición de la partícula como

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < aL \\ 1 & \text{si } aL \leq x < L \end{cases} \quad (5.12)$$

y su extensión periódica más allá del intervalo $[0, L]$. De esta manera, la fuerza $F_{\text{control}}(x) = \alpha(x)F_{\text{sierra}}(x)$ que siente la partícula cuando opera el control del potencial resulta

$$F_{\text{control}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < aL \\ \frac{V_0}{(1-a)L} & \text{si } aL \leq x < L, \end{cases} \quad (5.13)$$

siendo periódica en el espacio con periodo L . Esta fuerza es conservativa y deriva de un potencial

$$V_{\text{ef}}(x) = - \int_0^x F_{\text{control}}(x') dx' \quad (5.14)$$

del tipo representado en la figura 5.2. Esto es, dentro del intervalo $[0, L]$ el potencial efectivo vale

$$V_{\text{ef}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \frac{x}{L} \leq a \\ -\frac{V_0}{(1-a)} \left(\frac{x}{L} - a \right) & \text{si } a \leq \frac{x}{L} \leq 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

y fuera del intervalo $[0, L]$ continúa como indica la figura 5.2, de forma que la fuerza es periódica y el potencial continuo.

Dado el potencial al que está sometida la partícula, podemos escribir una ecuación de Fokker-Planck para la evolución temporal de su densidad de probabilidad $\rho(x, t)$, y si el potencial no depende del tiempo como en este caso, la ecuación se puede resolver al menos de manera formal en el límite estacionario.

5.1.3 La ecuación de Fokker-Planck

Sea $\rho(x, t)$ la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición x en el tiempo t . Sea $V_{\text{ef}}(x)$ el potencial que siente la partícula. Entonces la ecuación de Fokker-Planck que describe la evolución temporal de dicha densidad de probabilidad se escribe

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho(x, t) \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}(x) \right] + D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

donde γ es el coeficiente de fricción de la partícula y D su coeficiente de difusión. Debido a que el potencial efectivo no es acotado, la partícula no alcanza en principio ningún régimen estacionario, difundiéndose sin límite y ensanchando su densidad de probabilidad infinitamente de manera que la densidad de probabilidad tiende a cero en todo punto en el límite de tiempos largos.

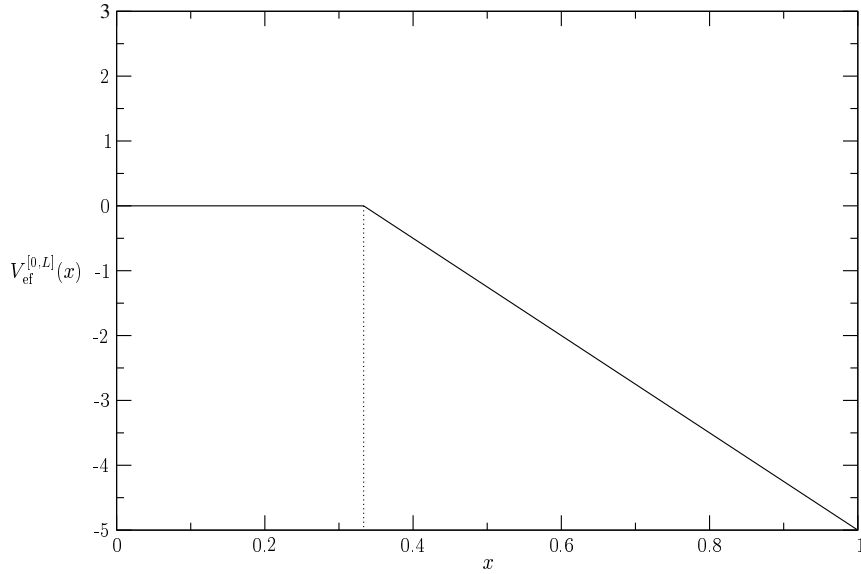
Sin embargo, ya que la fuerza es periódica de periodo L , el comportamiento de la partícula viene determinado no tanto por su posición x sino más bien por su posición módulo L . Si estamos interesados tan solo en la velocidad media de la partícula, será suficiente utilizar la variable $y(t) = x(t) \bmod L$ o bien tomar la variable $x(t)$ restringida al intervalo $[0, L]$ y con condiciones de contorno periódicas. Nótese la semejanza con los juegos paradójicos en los que resolvíamos el problema como una cadena de Markov en la variable $Y(t) = X(t) \bmod 3$.

Utilizando la variable x acotada al intervalo $[0, L]$ y condiciones de borde periódicas, la ecuación de Fokker-Planck toma la forma

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho(x, t) \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0, L]}(x) \right] + D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.17)$$

con

$$\rho(0, t) = \rho(L, t) \text{ y } J(0, t) = J(L, t). \quad (5.18)$$

Figura 5.3: Potencial efectivo en el intervalo $[0, L]$.

El potencial $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ es el potencial efectivo $V_{\text{ef}}(x)$ definido en (5.15) pero restringido al intervalo $[0, L]$, y se ha representado en la figura 5.3 para $L = 1$, $V_0 = 5$ y $a = 1/3$.

Puesto que la partícula se encuentra siempre dentro del intervalo $[0, L]$, la probabilidad de encontrarla en algún punto de este intervalo para un tiempo dado es igual a la unidad, de donde

$$\int_0^L \rho(x, t) dx = 1 \quad (5.19)$$

La densidad de probabilidad $\rho(x, t)$ tiene ahora norma finita para todo tiempo, incluidos tiempos muy largos y de esta forma el problema puede presentar soluciones estacionarias distintas de cero.

5.1.4 Cálculo de la velocidad promedio

Para encontrar la velocidad promedio de la partícula en el régimen estacionario basta con calcular la corriente de probabilidad estacionaria J . Siguiendo (Parrondo *et al.*, 2000b), la corriente de probabilidad definida como

$$J(x, t) \equiv -\frac{1}{\gamma} \rho(x, t) \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) - D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \quad (5.20)$$

permite escribir la ecuación de Fokker-Planck como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} J(x, t) \quad (5.21)$$

La corriente J se relaciona con el promedio de la velocidad de la partícula a través de la ecuación de Langevin, que para el caso de la partícula browniana sometida al potencial $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ se escribe

$$\gamma \dot{x}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) + \xi_i(t) \quad (5.22)$$

donde $\xi(t)$ es un ruido blanco gaussiano de media nula. Por tanto, tomando el promedio sobre el ruido obtenemos

$$\gamma \langle \dot{x}(t) \rangle = -\left\langle \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) \right\rangle \quad (5.23)$$

Por otra parte, integrando (5.20) en el intervalo $[0, L]$

$$\int_0^L J(x, t) dx = -\frac{1}{\gamma} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) \right\rangle + D [\rho(L, t) - \rho(0, t)] \quad (5.24)$$

Uniendo (5.23) y (5.24) y teniendo en cuenta que $\rho(L, t) = \rho(0, t)$ debido a las condiciones periódicas de contorno tenemos

$$\langle \dot{x}(t) \rangle = \int_0^L J(x, t) dx \quad (5.25)$$

En el estado estacionario ni $\rho(x, t)$ ni $J(x, t)$ dependen del tiempo, escribiéndose en ese caso la ecuación de Fokker-Planck como

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \quad (5.26)$$

que implica que la corriente es constante en todo el intervalo de 0 a L . Tomando

$$J(x, t) = J \quad (5.27)$$

se obtiene en (5.25)

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}} = JL. \quad (5.28)$$

donde el subíndice “est” indica que la velocidad promedio obtenida de esta manera corresponde al estado estacionario. Para calcular la corriente constante J sustituimos su definición (5.20) en (5.26), obteniendo una ecuación diferencial para $\rho(x)$

$$-\frac{1}{\gamma} \rho(x) \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) - D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) = J \quad (5.29)$$

Esta ecuación se puede resolver formalmente para cualquier potencial. La solución de la ecuación homogénea ($J = 0$) resulta

$$\rho(x)^{\text{hom}} = A e^{-V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)/kT} \quad (5.30)$$

Mediante variación de la constante A se obtiene la solución de la ecuación no homogénea ($J \neq 0$) en función de una constante de integración B :

$$\rho(x) = B e^{-V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)/kT} - \frac{J}{D} e^{-V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)/kT} \int_0^x e^{V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x')/kT} dx' \quad (5.31)$$

Como consecuencia se obtienen dos constantes de integración B y J que se fijan mediante las condiciones de contorno periódicas y la normalización de ρ , obteniéndose para la corriente

$$J = \frac{D(1 - e^{-\frac{\Delta V}{kT}})}{I_L^+ I_L^- + (e^{-\frac{\Delta V}{kT}} - 1) \int_0^L dx e^{-\frac{V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)}{kT}} \int_0^x dx' e^{V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x')/kT}} \quad (5.32)$$

donde $\Delta V = V_{\text{ef}}^{[0,L]}(0) - V_{\text{ef}}^{[0,L]}(L) = V_0$ e I_L^+ , I_L^- son las integrales

$$I_L^+ = \int_0^L dx e^{\frac{V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)}{kT}}, \quad I_L^- = \int_0^L dx e^{-\frac{V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)}{kT}} \quad (5.33)$$

Tanto I_L^+ , I_L^- como la integral doble que aparece en (5.32) se pueden calcular analíticamente ya que el potencial es sencillo, proporcionando así una expresión para la corriente y la velocidad promedio estacionaria:

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}} = \frac{2DV_0(1 - e^{-\frac{V_0}{kT}})/L}{2kT(1 - a^2)(1 - e^{-\frac{V_0}{kT}}) + V_0a^2(1 + e^{-\frac{V_0}{kT}})} \quad (5.34)$$

La expresión (5.34) ya sólo depende de los parámetros del potencial original, de la temperatura y del coeficiente de difusión de la partícula. Para el potencial particular representado en la figura 5.1 cuyos parámetros valen $V_0 = 5$, $a = 1/3$, $L = 1$ y tomando $D = 1$ y $kT = 1$, obtenemos una velocidad promedio de

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq 4.27D/L \quad (5.35)$$

Podemos comparar esta predicción con los resultados de simulación numérica de la ecuación de Langevin para la partícula browniana en el potencial de dientes de sierra original con el mismo juego de parámetros y al que aplicamos el control para encenderlo cuando la fuerza que produce es positiva y apagarlo en caso contrario (detalles de la simulación en la sección 5.1.8). Promediando la velocidad de la partícula obtenida sobre 50 realizaciones del ruido se obtiene

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}}^{\text{sim}} = (4.28 \pm 0.14)D/L \quad (5.36)$$

Como cabía esperar ya que (5.34) es una expresión exacta, el resultado de las simulaciones es totalmente compatible con el calculado mediante la ecuación de Fokker-Planck.

La velocidad promedio obtenida con el control es muy superior a la que se observa cuando encendemos el potencial de forma periódica, incluso utilizando para la comparación el encendido y apagado periódico que proporciona la

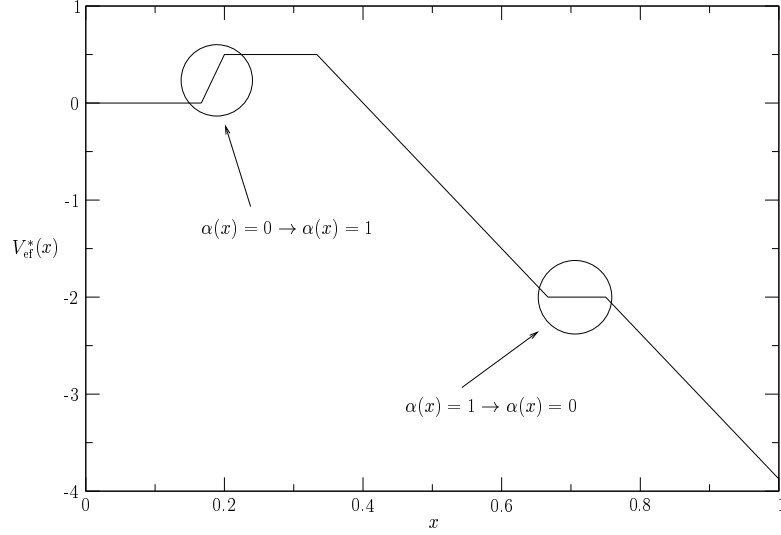


Figura 5.4: Potencial efectivo que siente la partícula bajo un control que se diferencia del óptimo en los dos tramos encerrados en los círculos.

mayor velocidad estacionaria posible. Para los valores de los parámetros antes mencionados, la máxima velocidad estacionaria se obtiene¹ para una duración del ciclo completo de encendido y apagado de $\tau \simeq 0.10L^2/D$, y resulta según las simulaciones

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}}^{\text{per}} \simeq (0.291 \pm 0.047)D/L \quad (5.37)$$

Pero el control no solo resulta mejor que el encendido periódico sino que además es el protocolo que mayor velocidad promedio genera de todos los protocolos retroalimentados posibles. Si partimos del control expresado en (5.12), cambiar $\alpha = 0$ por $\alpha = 1$ sobre cualquier segmento contenido en $0 \leq x < aL$ supone la aparición de una barrera de potencial en el potencial efectivo que siente la partícula como se muestra en la mitad izquierda de la figura 5.4. Tener que superar esta barrera de potencial implica una disminución de la corriente respecto de la corriente que se obtiene en ausencia de la barrera. La parte derecha de la figura muestra que si el cambio se produce en una región contenida en $x > aL$, pasar de $\alpha = 1$ a $\alpha = 0$ conlleva la aparición de un tramo horizontal del potencial que la partícula ha de superar por pura difusión, lo que de nuevo supone una reducción de la corriente respecto del control anterior. Ya que cualquier variación sobre el control definido por (5.12) provocaría una reducción de la corriente, y por tanto de la velocidad conseguida en estado estacionario, este control resulta ser el óptimo.

¹Consultar el apéndice G para los detalles del cálculo del periodo óptimo.

5.1.5 Este protocolo de control, ¿es un demonio de Maxwell?

En las secciones anteriores hemos visto cómo utilizando el protocolo de control podemos rectificar las fluctuaciones térmicas de una partícula y moverla en una determinada dirección. Este movimiento permanece incluso en presencia de una fuerza constante de dirección contraria, siempre que la fuerza sea lo suficientemente pequeña. Cuando la partícula se mueve en contra de la fuerza el sistema realiza un trabajo en su contra, por lo que constituye un motor. El motor podría utilizarse en el caso de que la fuerza corresponda por ejemplo a un campo gravitatorio, para elevar una cierta masa en contra del campo.

A primera vista podría parecer que el agente controlador, gracias a que conoce en cada instante la posición de la partícula, es capaz de realizar un trabajo rectificando las fluctuaciones térmicas de un sólo baño a temperatura T , lo que violaría el segundo principio de la Termodinámica, de forma similar a como lo hace el demonio de Maxwell. De hecho, la idea de la rectificación de fluctuaciones térmicas fue originalmente propuesta por Smoluchowski (1912) y Feynman (Feynman *et al.*, 1963) en relación con el demonio de Maxwell. Más recientemente, Touchette y Lloyd han analizado el demonio de Maxwell como un sistema de control retroalimentado y han encontrado que la Segunda Ley impone limitaciones sobre el control (Touchette y Lloyd, 2000). Aunque es posible diseñar demonios de Maxwell a partir de ciertas ratchets si se dispone de información sobre la posición de la partícula (Parrondo y Jiménez de Cisneros, 2002; Jiménez de Cisneros *et al.*, 2003), mostraremos que el motor basado en el criterio que maximiza la velocidad instantánea de la partícula cumple la Segunda Ley.

Aunque se puede desarrollar formalmente una termodinámica para los motores brownianos (Parrondo *et al.*, 2000b), no es necesario entrar en los detalles de dicha formulación para comprobar que cuando el sistema presenta una corriente positiva, y por tanto funciona como un motor, no viola la Segunda Ley. Basta con considerar el intercambio de energías que ocurre en el proceso en el que la partícula se desplaza desde el mínimo de un pozo hasta el mínimo del siguiente pozo en contra de la fuerza externa F gracias a la conexión del potencial efectuada por el agente y siempre en contacto con el baño a temperatura T .

En un proceso como el descrito existen los siguientes flujos de energía en el sistema:

- El agente aporta una energía E_{in} al motor al conectar el potencial.
- El motor realiza un trabajo W contra la fuerza externa.
- El baño recibe un calor Q .

El diagrama 5.5 muestra los posibles flujos de energía. El sentido de la flecha muestra la dirección en la que consideraremos positiva la correspondiente transferencia de energía, y que coincide siempre con el sentido entrante hacia el motor. Cuando el sistema funciona efectivamente como un motor la partícula se

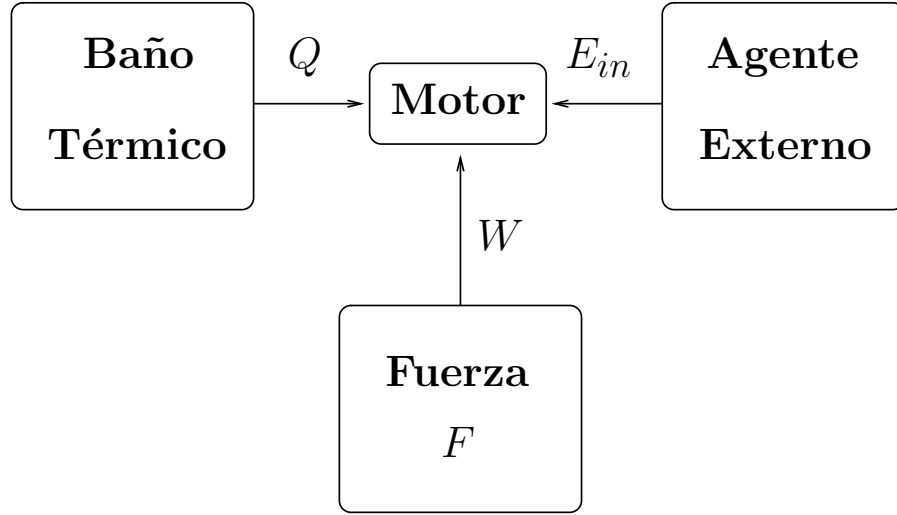


Figura 5.5: Diagrama que representa las transferencias de energía entre los distintos elementos del sistema. Las flechas indican el sentido en el que el correspondiente flujo (Q , E_{in} o W) se toma como positivo.

mueve en contra de la fuerza externa y el trabajo resulta negativo. El trabajo realizado por el motor al moverse la partícula de un pozo al siguiente pozo a la derecha en contra de la fuerza F , según la definición usual es

$$W = -FL \quad (5.38)$$

donde L es, recordemos, el periodo del potencial de dientes de sierra $V(x)$.

Supongamos que la partícula comienza en $x = 0$ con el potencial desconectado. Al realizar el recorrido de un pozo al siguiente, la partícula pasa por el intervalo $[0, aL)$. El agente mantiene en este intervalo el potencial de sierra desconectado. Cuando la partícula cruza el punto $x = aL$, el agente conecta el potencial y la partícula se sitúa en un punto donde el potencial vale ahora V_0 como se muestra en la figura 5.6. Para que la partícula gane esta energía, el agente la tiene que suministrar, es decir, al agente le cuesta una energía V_0 conectar el potencial:

$$E_{in} = V_0 \quad (5.39)$$

Finalmente, la partícula es arrastrada hasta el mínimo del siguiente pozo, donde el agente desconecta el potencial sin coste ni ganancia de energía pues la partícula está ahora en un punto tal que $V = 0$. La situación resulta entonces idéntica a la inicial, habiéndose completado un ciclo del motor. El primer principio de la termodinámica nos permite calcular el calor disipado al baño $-Q$

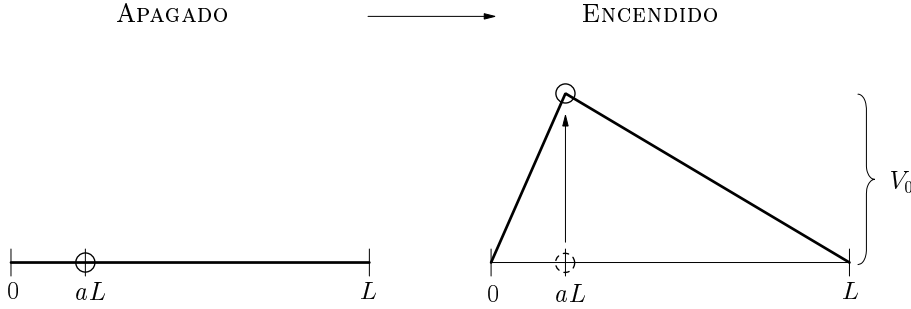


Figura 5.6: El agente externo conecta el potencial en el instante que la partícula cruza la posición $x = aL$, aportando para ello una energía V_0 .

como

$$-Q = W + E_{in} = V_0 - FL \quad (5.40)$$

En un ciclo completo del motor, la entropía producida (Parrondo *et al.*, 2000b) corresponde a la entropía producida por el intercambio de calor con el baño que es

$$S_{\text{prod}} = -Q/T. \quad (5.41)$$

El segundo principio establece que la entropía producida en un ciclo ha de ser mayor o igual que cero y por tanto

$$S_{\text{prod}} = -Q/T = \frac{1}{T}(V_0 - FL) \geq 0 \Leftrightarrow V_0 \geq FL \quad (5.42)$$

Es decir, que para que el control sea compatible con el segundo principio se tiene que cumplir que

$$F \leq \frac{V_0}{L}. \quad (5.43)$$

Por otra parte, para que el control haga que el sistema funcione como un motor ha de producir en estado estacionario movimiento de la partícula en contra de la fuerza externa F , o equivalentemente, una corriente J positiva. Como ya vimos, la corriente producida por el control puede expresarse en función del potencial efectivo $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ que siente la partícula según las expresiones (5.32) y (5.33). Estas expresiones son además válidas independientemente de la forma que tenga el potencial efectivo $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ que siente la partícula.

La expresión (5.32) se puede utilizar para calcular la corriente que produce el control en presencia de una fuerza externa F sin más que añadir al potencial efectivo $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ un término Fx , es decir, realizar la substitución

$$V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) \rightarrow V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) + Fx. \quad (5.44)$$

Bajo el nuevo potencial efectivo dado por $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) + Fx$, la diferencia ΔV vale

$$\Delta V = V_{\text{ef}}^{[0,L]}(0) - V_{\text{ef}}^{[0,L]}(L) - FL = V_0 - FL, \quad (5.45)$$

ya que $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(0) - V_{\text{ef}}^{[0,L]}(L) = V_0$ según la definición (5.15) para $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$. A la vista de la ecuación (5.32), para que la corriente sea estrictamente positiva, ΔV ha de ser mayor que cero, de manera que

$$J > 0 \Leftrightarrow \Delta V > 0 \Leftrightarrow V_0 - FL > 0 \Leftrightarrow F < \frac{V_0}{L}, \quad (5.46)$$

lo que implica que se cumple el segundo principio (5.42). Resumiendo, para que el control haga que el sistema funcione como un motor la corriente ha de ser positiva y eso hace que automáticamente se cumpla el segundo principio. Antes de analizar el caso $F = V_0/L$, resulta conveniente analizar las consecuencias que el segundo principio tiene en la eficiencia del motor.

El hecho de que se cumpla el segundo principio asegura que, de la energía V_0 suministrada por el agente, una parte se emplea en realizar el trabajo FL y el resto se disipa al baño térmico en forma de calor. En este caso, es razonable definir la eficiencia como el cociente entre el trabajo realizado y la energía suministrada

$$\eta = -W/E_{\text{in}} = 1 + \frac{Q}{E_{\text{in}}} = FL/V_0 \quad (5.47)$$

En términos de la eficiencia, el segundo principio (5.42) se expresa como

$$\eta \leq 1 \Leftrightarrow FL \leq V_0 \quad (5.48)$$

El control funciona como un motor de eficiencia menor que 1 siempre y cuando $F \leq V_0/L$ y cumple en tal caso el segundo principio como ya hemos explicado anteriormente. La eficiencia alcanza el valor 1 en el caso en que $F = V_0/L$ y por tanto $Q = 0$, no produciéndose aumento de entropía y resultando un proceso reversible. La fuerza $F_{\text{stop}} \equiv V_0/L$ recibe el nombre de “*stopping force*” o fuerza de parada, ya que si la fuerza externa equivale a la fuerza de parada entonces la pendiente global del potencial $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) + Fx$ resulta nula ($\Delta V/L = 0$ como se muestra en la figura 5.7) y la corriente producida por el control es nula. En otras palabras, el estado estacionario es un estado de corriente nula (se cumple balance detallado) resultando en realidad un estado de equilibrio. Como el sistema se encuentra en equilibrio no se produce ningún proceso irreversible².

De forma quizás más intuitiva podríamos decir que en el equilibrio la probabilidad de que la partícula salte la barrera de potencial hasta el pozo de la

²Cuando actúa el control sobre el motor, el agente gasta como vimos una energía V_0 si la partícula atraviesa de izquierda a derecha la posición $x = aL$ y enciende el potencial. Cuando la partícula realiza el proceso contrario, esto es, cruza de derecha a izquierda esa misma posición, el agente desconecta el potencial, recuperando una energía también V_0 . Estamos suponiendo que el intercambio de energía entre el agente y la partícula se realiza de forma totalmente reversible. El único proceso productor de entropía es entonces el intercambio de calor con el baño y cuando el calor intercambiado se anula, todos los procesos que se dan son reversibles, alcanzándose eficiencia 1. No obstante, la situación de eficiencia 1 se alcanza cuando el motor no realiza trabajo, esto es, a potencia nula, como se explica en el texto.

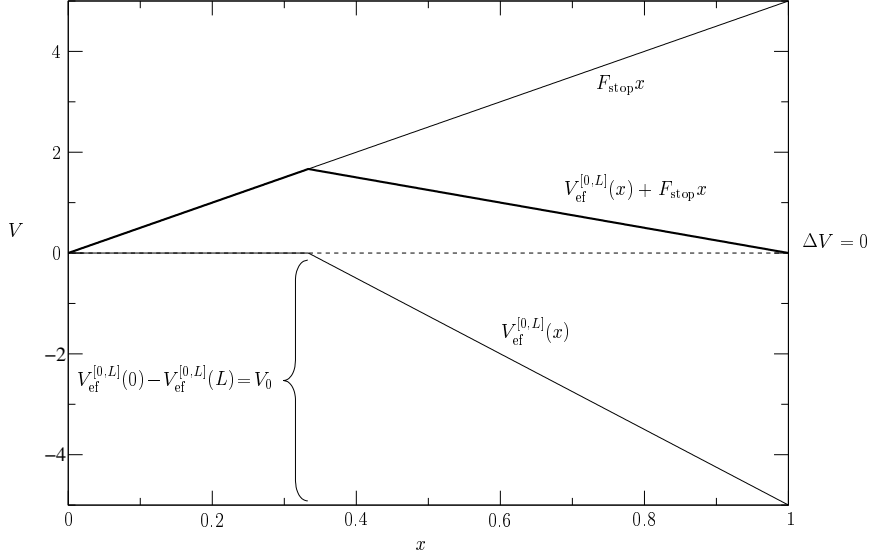


Figura 5.7: Potencial efectivo $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x)$ más el término Fx cuando F toma el valor de la fuerza de parada $F = F_{\text{stop}} = V_0/L$. La pendiente global de $V_{\text{ef}}^{[0,L]}(x) + Fx$ resulta en tal caso nula ($\Delta V/L = 0$).

derecha es exactamente la misma que la probabilidad de saltar hacia el pozo de la izquierda y el sistema deja en realidad de funcionar como un motor ya que no se mueve en promedio. Muestra de ello es que si bien la eficiencia alcanza el valor máximo de 1 a medida que F tiende a F_{stop} , la potencia del motor tiende a 0. Según la definición habitual de potencia

$$\dot{W} = F \langle \dot{x}(t) \rangle = F J(F) L \Rightarrow \lim_{F \rightarrow F_{\text{stop}}} \dot{W} = F_{\text{stop}} J(F_{\text{stop}}) L = 0 \quad (5.49)$$

Cuando F es menor que F_{stop} , el sistema deja de estar en equilibrio, aparece una corriente hacia la derecha, la partícula realiza trabajo pero parte de la energía introducida por el agente se disipa al baño en forma de calor, disminuyendo la eficiencia del motor. De forma similar a los motores descritos en (Andresen *et al.*, 1984; Curzon y Ahlborn, 1975) para conseguir potencia finita el motor ha de hacerse ineficiente.

En cualquier caso, el protocolo de control que maximiza la velocidad instantánea de la partícula no constituye un demonio de Maxwell. De hecho, cualquier protocolo de tipo $\alpha(x)$ dará lugar a un potencial efectivo para la partícula, con su correspondiente F_{stop} , para el que los argumentos anteriores siguen siendo válidos, lo que significa que ningún control que dependa exclusivamente de la posición de la partícula generará un demonio de Maxwell en el caso de la flashing ratchet.

5.1.6 Generalización a N partículas

Como hemos visto en la sección 5.1.4, el protocolo de maximización de la velocidad instantánea de la partícula resulta ser la forma óptima de control del potencial en cuanto a la velocidad promedio obtenida en régimen estacionario. En esta sección consideraremos una extensión de ese protocolo de control que consiste en la maximización de la velocidad instantánea del centro de masas de un sistema formado por N partículas brownianas independientes. Analizaremos su efecto sobre la velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario en función del número de partículas que componen el sistema, tomando como referencia la velocidad estacionaria que produce la conexión y desconexión periódica del potencial.

De manera formal, el sistema consiste en un motor browniano o flashing ratchet formado por un número N de partículas brownianas independientes en el límite sobreamortiguado a temperatura T y sometidas al potencial de dientes de sierra $V(x)$ definido en (5.2). Bajo este potencial, las partículas sienten una fuerza

$$F_{\text{sierra}}(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (5.50)$$

y su movimiento puede describirse mediante las ecuaciones de Langevin

$$\gamma \dot{x}_i(t) = \alpha(t) F_{\text{sierra}}(x_i(t)) + \xi_i(t) ; \quad i = 1 \dots N, \quad (5.51)$$

donde $x_i(t)$ es la posición de la partícula i -ésima, γ el coeficiente de fricción y $\xi_i(t)$ son ruidos blancos gaussianos de media nula y correlación

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\gamma kT \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (5.52)$$

Por último, el parámetro de control $\alpha(t)$ determina el estado del potencial en el instante t , siendo los únicos posibles valores $\alpha(t) = 1$, potencial encendido, o $\alpha(t) = 0$, potencial apagado.

El protocolo $\alpha(t)$ que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas se puede escribir en forma de control retroalimentado, esto es, en función únicamente de las posiciones de las partículas. De la definición de centro de masas tenemos

$$\dot{x}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \quad (5.53)$$

Por otra parte, sumando (5.51) para todo i

$$\gamma \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) = \alpha(t) \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) + \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \quad (5.54)$$

que substituido en (5.53) queda

$$\dot{x}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{\gamma N} \alpha(t) \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) + \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \quad (5.55)$$

Dado que α sólo puede tomar los valores 0 o 1, la expresión (5.55) alcanza su máximo respecto de α tomando

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (5.56)$$

que se puede expresar de forma más sencilla definiendo $f(t)$ como la fuerza por partícula debida al potencial de sierra

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) \quad (5.57)$$

y utilizando la función de Heaviside

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.58)$$

escribimos el control como

$$\alpha(t) = \Theta(f(t)) \quad (5.59)$$

Las expresiones (5.57) y (5.59) y (5.51) muestran por un lado que $\alpha(t)$ tan solo depende en realidad de la posición de las partículas y por otro, que la evolución de una partícula dada depende de las posiciones de todas las demás ya que todas afectan al estado del potencial que siente cada partícula. De esta manera, este tipo de control produce un acoplamiento efectivo de las partículas de modo que las partículas dejan de comportarse de forma independiente. Antes de pasar a analizar el efecto de este protocolo de control sobre la velocidad del centro de masas a largo plazo es conveniente escribir también la forma que toma $\alpha(t)$ para el protocolo periódico que tomaremos como referencia. En este caso, el potencial se enciende y apaga periódicamente en el tiempo, siendo τ la duración total del ciclo apagado-encendido que produzca la mayor de todas las velocidades estacionarias posibles alcanzables mediante un protocolo periódico³. En términos de $\alpha(t)$ esto es

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \tau/2 \\ 0 & \text{para } \tau/2 \leq t < \tau \end{cases} \quad (5.60)$$

y $\alpha(t + \tau) = \alpha(t)$. Al contrario que en el control retroalimentado, en este caso las partículas son totalmente independientes obteniéndose el mismo valor para el promedio de la velocidad del centro de masas en estado estacionario independientemente del número de partículas considerado. Este valor será, por tanto, el correspondiente a la flashing ratchet original (Astumian y Bier, 1994; Ajdari y Prost, 1993).

³Ver los detalles del cálculo del τ óptimo en el apéndice G.

5.1.7 Análisis I. Ecuación de Fokker-Planck

¿Es posible realizar un análisis similar al de $N = 1$ mediante la construcción de un potencial efectivo que represente el efecto del control retroalimentado actuando sobre el potencial de sierra? No, y ello se debe en último término a que el campo de fuerzas resultante del control no es conservativo, como se aprecia claramente para dos partículas, aunque resulta igualmente cierto para cualquier número de partículas superior a 1.

Tomemos $N = 2$. Puesto que los correspondientes ruidos térmicos ξ_1 y ξ_2 están descorrelacionados, el movimiento de ambas partículas se corresponde exactamente con el movimiento de una partícula browniana efectiva que se moviera en 2 dimensiones cuya posición viene dada por $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. La densidad de probabilidad de encontrar la partícula efectiva en $(x_1(t), x_2(t))$ cumple la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (5.61)$$

donde la corriente \vec{J} está definida como

$$\vec{J}(x, t) = -\frac{1}{\gamma} \vec{F} \rho(\vec{x}, t) - D \vec{\nabla} \rho(\vec{x}, t). \quad (5.62)$$

y \vec{F} es la fuerza que siente la partícula. El estado estacionario viene dado por

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (5.63)$$

Supongamos por un momento que \vec{F} es conservativa, esto es, que existe un potencial $V(x_1, x_2)$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$. En tal caso, en el estado estacionario ha de cumplirse

$$\frac{1}{\gamma} \rho \nabla^2 V + \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} \rho - D \nabla^2 \rho = 0. \quad (5.64)$$

Es sencillo comprobar que

$$\rho(x_1, x_2) = A e^{-V(x_1, x_2)/kT} \quad (5.65)$$

es solución de la ecuación estacionaria (5.64). Pero, ¿es conservativa la fuerza que siente la partícula efectiva cuando opera el protocolo de control que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas?

La partícula siente una fuerza $\vec{F} = (F_{\text{sierra}}(x_1(t)), F_{\text{sierra}}(x_2(t)))$, si el potencial de dientes de sierra se encuentra encendido y $\vec{F} = 0$ si está apagado. De acuerdo con el protocolo de control (5.59), el potencial se encuentra encendido si y solo si

$$F_{\text{sierra}}(x_1) + F_{\text{sierra}}(x_2) \geq 0. \quad (5.66)$$

Como el potencial de dientes de sierra es asimétrico, la fuerza (negativa) en el tramo corto es más intensa que la fuerza (positiva) en el tramo largo, por lo que

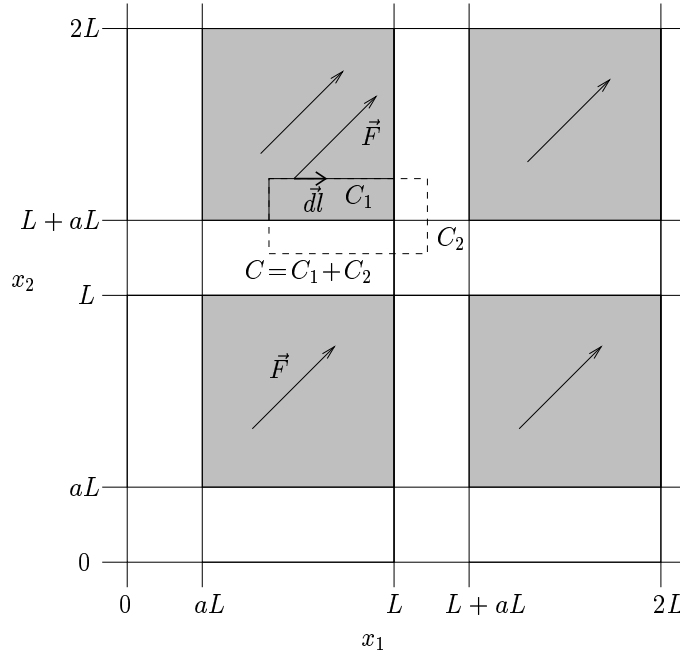


Figura 5.8: Representación de la fuerza que siente la partícula browniana efectiva cuya posición viene dada por $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Las zonas sombreadas en gris corresponden a $\vec{F} = V_0/((1-a)L)(1, 1)$, mientras que las zonas en blanco corresponden a $\vec{F} = 0$. La curva C es una curva cerrada en la que la circulación de la fuerza es distinta de cero, demostrando que la fuerza no es conservativa.

la condición 5.66 solo se cumple si la fuerza es positiva para ambas partículas. Esto es, el potencial solo se enciende si

$$a \leq x_1 \bmod L \text{ y } a \leq x_2 \bmod L \quad (5.67)$$

permaneciendo desconectado en el resto de casos. La región determinada por las condiciones (5.67) corresponde a una región cuadrada como la representada en la figura 5.8 en color gris. En esta región, la fuerza \vec{F} toma el valor constante

$$\vec{F} = \frac{V_0}{(1-a)L}(1, 1) \quad (5.68)$$

ya que el potencial se encuentra encendido. En la misma figura las regiones de color blanco corresponden a $\vec{F} = 0$, es decir, a las regiones donde el potencial está desconectado. Dado el campo de fuerzas, basta calcular su circulación sobre la curva cerrada C dibujada en la misma figura 5.8 que consta de un tramo C_1 incluido en la región gris y otro tramo C_2 en la región blanca, para comprobar

que el campo no es conservativo. En efecto

$$\oint_C \vec{dl} \vec{F} = \int_{C_1} \vec{dl} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{dl} \vec{F} \quad (5.69)$$

pero

$$\int_{C_2} \vec{dl} \vec{F} = 0 \quad (5.70)$$

ya que $\vec{F} = 0$ en toda la región blanca donde se incluye C_2 , por lo que

$$\oint_C \vec{dl} \vec{F} = \int_{C_1} \vec{dl} \vec{F} > 0. \quad (5.71)$$

La integral de línea de \vec{F} sobre C_1 es estrictamente positiva puesto que tanto el tramo vertical como el horizontal de C_1 contribuyen positivamente al ser el ángulo entre \vec{dl} y \vec{F} siempre menor que $\pi/2$.

Puesto que la circulación de la fuerza sobre ciertas curvas cerradas es distinta de 0, el campo de fuerzas no es conservativo y no deriva de ningún potencial. De esta manera, aunque uno puede plantear una ecuación de Fokker-Planck para la distribución de probabilidad $\rho(x_1, x_2, t)$, no es posible encontrar una solución estacionaria del tipo $\rho(x_1, x_2) \propto \exp(-V(x_1, x_2)/kT)$.

En general, para N partículas el espacio de fases tendrá N dimensiones, pero siempre podemos restringir nuestro análisis al plano (x_1, x_2) contenido dentro del espacio de dimensión mayor, de modo que en ningún caso con $N > 1$ se puede escribir el campo de fuerzas como el gradiente de un cierto potencial.

Dado que la resolución analítica de la ecuación de Fokker-Planck en N dimensiones parece compleja, uno podría tratar de resolverla numéricamente, o alternativamente, realizar simulaciones de las ecuaciones de Langevin (5.51), siendo esta opción la finalmente escogida. Los resultados, así como los detalles más importantes de dichas simulaciones son el objeto de la siguiente sección.

5.1.8 Simulaciones

Recordemos que la dinámica del sistema con N partículas se puede describir mediante las ecuaciones de Langevin

$$\gamma \dot{x}_i(t) = \alpha(t) F_{\text{sierra}}(x_i(t)) + \xi_i(t); \quad i = 1 \dots N, \quad (5.72)$$

donde $\xi_i(t)$ son ruidos blancos gaussianos de media nula y correlación

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\gamma kT \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (5.73)$$

La discretización temporal más sencilla de este sistema de ecuaciones estocásticas proporciona el esquema de Euler, que para la partícula i -ésima queda

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{\gamma} \alpha^k F_{\text{sierra}}(x_i^k) \Delta t + \sqrt{2D\Delta t} z_i \quad (5.74)$$

donde Δt es el intervalo o paso temporal de forma que $t = k\Delta t$ y $x_i^k = x(k\Delta t)$ y $\alpha^k = \alpha(k\Delta t)$. Por último, los z_i son números aleatorios de distribución normal e independientes entre sí, esto es

$$\langle z_i \rangle = 0 \quad (5.75)$$

$$\langle z_i z_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (5.76)$$

Cuando el potencial se controla de modo que se maximice la velocidad instantánea del centro de masas, el parámetro de control discretizado α^k toma la expresión

$$\alpha^k(x^k) = \Theta(f^k), \quad (5.77)$$

donde Θ es la función de Heaviside y

$$f^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x^k) \quad (5.78)$$

que se puede calcular en función de las posiciones de las partículas en el paso temporal k .

Si aplicamos el control periódico sobre el potencial, la expresión para el parámetro de control es

$$\alpha^k = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k\Delta t < \tau/2 \\ 0 & \text{si } \tau/2 \leq k\Delta t < \tau \end{cases} \quad (5.79)$$

Así pues, dada la condición inicial x_0 , las trayectorias de las partículas se pueden calcular iterando (5.74) en el computador para cualquiera de los dos protocolos de control. Para ello debemos no obstante generar un número aleatorio gaussiano de media 0 y desviación estándar 1 por cada partícula y paso temporal. En todas las simulaciones realizadas se ha utilizado una subrutina basada en la subrutina **gasdev** (Press *et al.*, 1992) que genera un número gaussiano de distribución normal a partir de dos números aleatorios uniformemente distribuidos. La única modificación consiste en suministrar los números distribuidos uniformemente utilizando el generador de números aleatorios **ran2** en lugar de **ran1** (Press *et al.*, 1992) como hace la subrutina original. La razón estriba en que según (Press *et al.*, 1992) **ran1** empieza a fallar los tests estadísticos de validación cuando el número de llamadas supera el periodo del generador que es aproximadamente 10^8 . Para determinadas simulaciones necesitaremos del orden de 10^{12} números aleatorios gaussianos por lo que el generador **ran2**, cuyos autores consideran “perfecto” salvo por las limitaciones de precisión de los ordenadores, resulta adecuado al ser su periodo mayor que 10^{18} .

Una vez obtenidas las trayectorias de las N partículas podemos hallar la velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario mediante

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle_{\text{est}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x_{\text{cm}}(t) \rangle}{t}. \quad (5.80)$$

El promedio $\langle \cdot \rangle$ indica promedio a las diferentes realizaciones con el mismo número de partículas. Para las simulaciones de ordenador, el límite de tiempo infinito debe entenderse como “un tiempo suficientemente largo como para que se halla alcanzado el estado estacionario”. Es decir, si t_f es el tiempo total de simulación y es lo suficientemente largo, podemos calcular la velocidad como

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{\langle x_{\text{cm}}(t_f) - x_{\text{cm}}(0) \rangle}{t_f} = \frac{\langle x_{\text{cm}}(t_f) \rangle}{t_f} \quad (5.81)$$

ya que todas las partículas comienzan en $x_i = 0$. No obstante, aunque la contribución del transitorio inicial se elimina en el límite de tiempos largos, en la simulación tendrá cierta influencia ya que t_f es necesariamente finito. Para reducir esta influencia, se puede medir la velocidad como la pendiente media de la posición del centro de masas a partir de un cierto tiempo $t_i > 0$, es decir

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle_{\text{st}} = \frac{\langle x_{\text{cm}}(t_f) - x_{\text{cm}}(t_i) \rangle}{t_f - t_i} \quad (5.82)$$

Resulta indiferente introducir o no el tiempo dentro del promedio ya que todas las realizaciones para un mismo número de partículas comparten los mismos valores de t_f y t_i . Finalmente, dado que el promedio es sobre realizaciones, podemos estimar el error cometido calculando la desviación típica del flujo obtenido en cada realización. Los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones fueron, para el potencial $V_0 = 5$, $L = 1$, $a = 1/3$, en unidades tales que $kT = 1$ y $D = 1$. El paso temporal del algoritmo $\Delta t = 10^{-4}$ y los tiempos finales t_f oscilan desde $t_f = 1000$ para conjuntos de pocas partículas hasta $t_f = 10$ para los sistemas mayores. Aunque los tiempos para los sistemas mayores son algo cortos, esto no influye demasiado en el resultado final ya que el comportamiento para estos sistemas es muy regular y más bien poco fluctuante, como veremos en la sección 5.1.10.

Los resultados de las simulaciones llevadas a cabo se muestran en la figura 5.9 donde se compara, para ambos protocolos de control, el valor medio de la velocidad del centro de masas en el estado estacionario según la expresión (5.82) en función del número de partículas que componen el sistema.

Para el apagado y encendido periódico, las partículas son independientes y el resultado no depende del número de partículas, por lo que en la figura aparece como una línea horizontal. En otras palabras, el promedio de la posición de una sola partícula a N realizaciones es equivalente al resultado de una realización con N partículas.

La curva correspondiente al protocolo de maximización de la velocidad instantánea sí depende del número de partículas del sistema, ya que como vimos el estado del potencial que afecta a todas las partículas depende de la posición de cada una de ellas, lo que introduce una cierta interacción efectiva entre ellas. El hecho de que este protocolo produzca una velocidad decreciente con el número de partículas es una señal clara de que existe un fenómeno de frustración en el sistema. Al igual que ocurría con los juegos paradójicos en los que la elección de uno u otro juego generalmente beneficia a unos determinados jugadores y

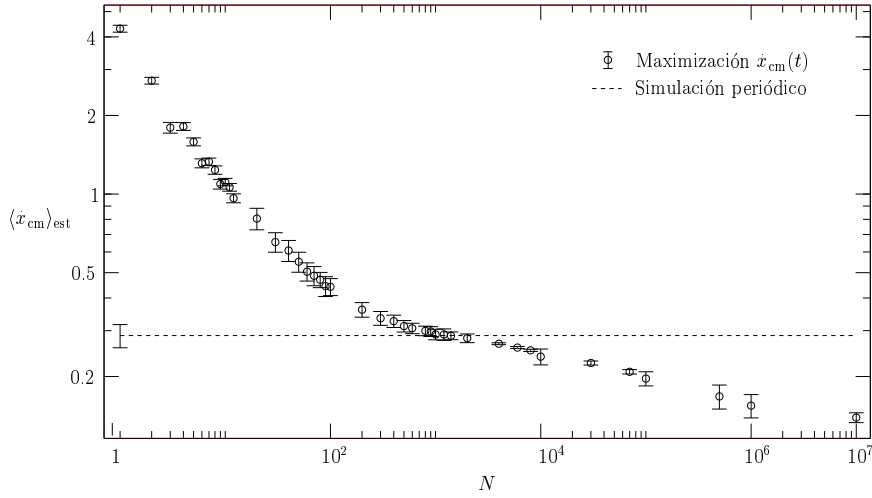


Figura 5.9: Velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario en función del número de partículas que componen el sistema. Los valores utilizados en las simulaciones son $V_0 = 5$, $L = 1$, $a = 1/3$, $kT = 1$, $D = 1$.

resulta inconveniente para otros, en el caso del motor browniano, encender el potencial, por ejemplo, moverá unas partículas hacia la derecha, pero puede provocar que una cierta fracción retroceda.

En la figura vemos claramente que el protocolo de maximización de la velocidad instantánea, que resulta óptimo para una partícula, produce mayor velocidad estacionaria que el protocolo periódico solamente si el número de partículas es suficientemente pequeño. En concreto, para este conjunto de parámetros de las simulaciones, la maximización de \dot{x}_{cm} produce una mayor velocidad estacionaria solo en sistemas de hasta unas 1300 partículas aproximadamente. Para mayor número de partículas no solo resulta peor si no que la figura también parece indicar que si el sistema es suficientemente grande, utilizando el control no se consigue mover las partículas en absoluto.

Si bien la resolución analítica resulta cuando menos compleja, el comportamiento del sistema se puede comprender mediante dos aproximaciones cuya predicción para la velocidad estacionaria además concuerda con el resultado de las simulaciones para un número suficientemente pequeño o suficientemente grande de partículas. Por ejemplo, el análisis realizado en la sección 5.1.10 corrobora que la velocidad estacionaria tiende a 0 a medida que el número de partículas crece.

5.1.9 Análisis II. Aproximaciones N pequeño

En esta sección se muestra como se puede calcular de forma aproximada la velocidad estacionaria del centro de masas cuando el sistema se controla mediante

el protocolo de maximización de la velocidad instantánea. Tomando el promedio en la ecuación (5.55) para el movimiento del centro de masas de un sistema con N partículas, y teniendo en cuenta que el promedio del ruido es nulo, obtenemos la siguiente ecuación exacta

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle = \frac{1}{\gamma N} \langle \alpha(t) \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) \rangle. \quad (5.83)$$

En función de la fuerza por partícula

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i(t)) \quad (5.84)$$

la ecuación anterior se expresa de manera más sencilla:

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle \alpha(t) f(t) \rangle. \quad (5.85)$$

Y si aplicamos el control $\alpha(t) = \Theta(f(t))$ que maximiza $\dot{x}_{\text{cm}}(t)$, tenemos

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle \Theta(f(t)) f(t) \rangle. \quad (5.86)$$

El término de ruido de la ecuación de Langevin hace que $f(t)$ sea una variable estocástica. El promedio sobre el ruido del miembro derecho de la ecuación (5.86) ha de entenderse entonces como un promedio sobre la distribución de probabilidad de $f(t)$ que es consecuencia de la existencia de dicho ruido. Puesto que calcular la distribución de $f(t)$ en estado estacionario no es posible, para calcular la velocidad promedio debemos hacer alguna hipótesis sobre la distribución de $f(t)$. Resulta sin embargo más sencillo elaborar las hipótesis sobre una cantidad directamente relacionada con $f(t)$, el número $n(t)$ de partículas que se encuentran en el intervalo $[0, aL]$.

Como ya vimos, dado que la fuerza debida al potencial de sierra es periódica, para calcular la velocidad basta con conocer si la partícula se encuentra en alguno de los tramos que corresponden a una pendiente positiva del potencial de sierra o a una negativa. Podemos restringir entonces sin pérdida de generalidad la coordenada x de cada partícula al intervalo $[0, L]$ y tomar condiciones de contorno periódicas. De este modo la notación se simplifica. Por ejemplo, el potencial de sierra consta entonces sólo de dos tramos, uno de pendiente positiva contenido en $[0, aL]$ y otro de pendiente negativa de $[aL, L]$ y $F_{\text{sierra}}(x_i)$ siempre toma uno de dos posibles valores:

$$F_{\text{sierra}} = \frac{-V_0}{aL} \equiv F_- \quad (5.87)$$

si la partícula se encuentra en $[0, aL]$, o bien

$$F_{\text{sierra}} = \frac{V_0}{(1-a)L} \equiv F_+ \quad (5.88)$$

si la partícula está en el tramo de pendiente negativa en el intervalo $[aL, L)$. Así, la fuerza total por partícula solo depende de la población total de cada uno de los dos intervalos.

Como $n(t)$ es el número de partículas que se encuentran en el intervalo $[0, aL)$, el sumatorio de (5.84) contiene $n(t)$ términos iguales F_- y $N - n(t)$ términos F_+ , por lo que

$$f(t) = \frac{1}{N}[n(t)F_- + (N - n(t))F_+] = -\frac{V_0 n(t)}{aNL} + \frac{V_0}{(1-a)L} \left(1 - \frac{n(t)}{N}\right) \quad (5.89)$$

El control $\Theta(f(t))$ se puede expresar también en función de $n(t)$ ya que

$$f(t) = 0 \Rightarrow \frac{V_0 n}{aNL} = \frac{V_0}{(1-a)L} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \Rightarrow n = Na, \quad (5.90)$$

siendo $f(t) > 0$ si y solo si $n(t) < Na$. Recordando la definición de la función de Heaviside (5.58), escribimos

$$\Theta(f(t)) = \Theta(Na - n(t)) \quad (5.91)$$

y finalmente, substituyendo (5.89) y (5.91) y reagrupando términos, obtenemos la expresión para la velocidad promedio en función de $n(t)$

$$\langle \dot{x}_{cm}(t) \rangle = \frac{V_0}{\gamma LN} \left\langle \Theta(Na - n(t)) \left(\frac{N - n(t)}{1-a} - \frac{n(t)}{a} \right) \right\rangle. \quad (5.92)$$

De forma equivalente a lo que ocurría para $f(t)$, el promedio que aparece en el miembro derecho corresponde a un promedio sobre la distribución de la variable estocástica $n(t)$, y para calcular la velocidad promedio en estado estacionario, debemos hacer alguna hipótesis sobre la distribución de $n(t)$ en estado estacionario. Para ello partimos de las siguientes suposiciones:

1. Las posiciones de las partículas son estadísticamente independientes.
2. La probabilidad de que una partícula dada se encuentre en el intervalo $[0, aL]$ vale a .

Supondremos además que ambas se cumplen en cualquier instante de tiempo una vez alcanzado el estado estacionario y tanto si el potencial está conectado como desconectado.

Las dos suposiciones resultan razonables si tenemos en cuenta que las cumple tanto la distribución de equilibrio correspondiente al potencial encendido como apagado. Para demostrarlo, consideremos las distribuciones de equilibrio del potencial en estado encendido o apagado por separado.

En el modelo, la única interacción posible entre partículas proviene de la conexión o desconexión del potencial. Si consideramos los dos estados del potencial por separado, sin cambios entre uno y otro, las posiciones de las partículas cumplen 1.

Por otra parte, si el potencial de sierra $V(x)$ se encuentra siempre encendido, la densidad de probabilidad de una partícula, correspondiente al estado de equilibrio es

$$\rho_{\text{sierra}}^{\text{eq}}(x) = \frac{1}{Z_{\text{sierra}}} e^{-V(x)/kT} \quad (5.93)$$

La normalización nos permite calcular el valor de la constante Z_{sierra} :

$$\int_0^L \rho_{\text{sierra}}^{\text{eq}}(x) dx = 1 \Rightarrow Z_{\text{sierra}} = \frac{LkT}{V_0} (1 - e^{-V_0/kT}) \quad (5.94)$$

Por último, la probabilidad $p_{\text{sierra}}(x \in [0, aL])$ de encontrar la partícula en el intervalo $[0, aL]$ es la integral de $\rho_{\text{sierra}}^{\text{eq}}(x)$ sobre dicho intervalo

$$p_{\text{sierra}}(x \in [0, aL]) = \int_0^{aL} \frac{1}{Z_{\text{sierra}}} e^{-V(x)/kT} = \frac{1}{Z_{\text{sierra}}} (1 - e^{-V_0/kT}) \frac{aLkT}{V_0} = a \quad (5.95)$$

Para el potencial apagado, el movimiento de la partícula es un proceso de difusión en el intervalo $[0, L]$ con condiciones de contorno periódicas. La densidad de equilibrio correspondiente es constante

$$\rho_0^{\text{eq}}(x) = \frac{1}{Z_0}. \quad (5.96)$$

De nuevo, por normalización,

$$\int_0^L \rho_0^{\text{eq}}(x) dx = 1 \Rightarrow Z_0 = L \quad (5.97)$$

La probabilidad de que la partícula se encuentre en $[0, aL]$, si el potencial se encuentra apagado es de nuevo a , ya que

$$p_0(x \in [0, aL]) = \int_0^{aL} \rho_0^{\text{eq}}(x) = \frac{1}{L} aL = a, \quad (5.98)$$

lo que demuestra que ambas distribuciones de equilibrio cumplen 2.

Analizamos ahora las consecuencias que 1 y 2 tienen sobre el cálculo de la distribución de probabilidad de la variable $n(t)$. Supongamos que tomamos las N partículas y colocamos cada una de forma independiente sobre el intervalo $[0, L]$. Cada una de ellas la colocamos dentro del subintervalo $[0, aL]$ con probabilidad a y fuera con $1 - a$. La probabilidad $p(n)$ de acabar con exactamente n de las N posibles dentro del intervalo $[0, aL]$ sigue una distribución binomial de parámetro a :

$$p(n) = \binom{N}{n} a^n (1 - a)^{N-n} \quad (5.99)$$

La aproximación que estamos considerando aquí consiste en afirmar que $n(t)$ sigue dicha distribución binomial en todo instante t una vez alcanzado el

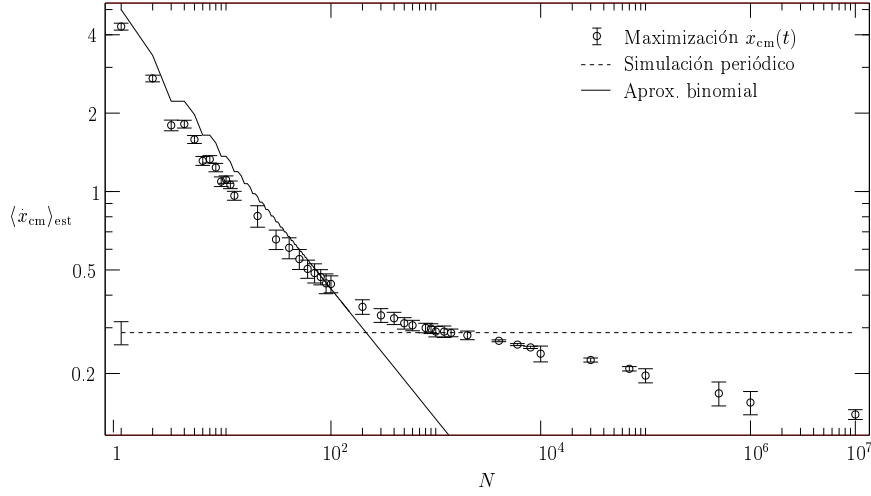


Figura 5.10: Velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario para la maximización de la velocidad instantánea. Comparación de la aproximación binomial/gaussiana con los resultados de simulación. El valor para el protocolo periódico se mantiene en la figura como referencia.

estado estacionario. La distribución estacionaria de $n(t)$ nos permite calcular el promedio del miembro derecho de (5.92) de forma que

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{V_0}{\gamma L N} \sum_{n=0}^N p(n) \Theta(Na - n) \left(\frac{N-n}{1-a} - \frac{n}{a} \right) \quad (5.100)$$

La función $\Theta(Na - n)$ elimina todos los sumandos con $n > Na$. Además, el sumando con $n = Na$ resulta nulo, por lo tanto

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{V_0}{\gamma L N} \sum_{n=0}^{n < Na} p(n) \left(\frac{N-n}{1-a} - \frac{n}{a} \right) \quad (5.101)$$

Finalmente, substituyendo el valor de $p(n)$ llegamos a

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{V_0}{\gamma L N} \sum_{n=0}^{n < Na} \left(\frac{N-n}{1-a} - \frac{n}{a} \right) \binom{N}{n} a^n (1-a)^{N-n} \quad (5.102)$$

que depende únicamente de los parámetros del potencial V_0 , a y L , del coeficiente de fricción γ y del número de partículas N . La figura 5.10 muestra la comparación entre los resultados de simulación y la expresión (5.102) para $V_0 = 5$, $a = 1/3$, $L = 1$, y $\gamma = 1$, $D = 1$ y $kT = 1$.

La aproximación binomial reproduce la forma de la curva experimental considerablemente bien para $1 \leq N < 100$, teniendo en cuenta la sencillez de la

aproximación y el hecho de que parte de primeros principios sin ningún tipo de ajuste de parámetros. La curva reproduce incluso los “escalones” que se aprecian en los resultados de simulación entre $N = 3$ y $N = 4$ o entre $N = 6$ y $N = 7$.

Además, la aproximación proporciona además el valor de la velocidad promedio con un error relativo que nunca supera el 26 por ciento del valor de simulación para $N < 100$. El acuerdo numérico mejora además a medida que decrece el cociente V_0/kT . De hecho, si uno toma el límite $V_0/kT \rightarrow 0$ en la expresión exacta para $N = 1$ (5.34), obtiene el resultado dado por (5.102) para $N = 1$.

Sin embargo, como se aprecia claramente en la figura 5.10, la aproximación binomial predice un decrecimiento de la velocidad promedio con el número de partículas mucho más rápido que el que muestran los resultados de simulación. Para analizar el comportamiento de la aproximación binomial cuando crece el número de partículas podemos aproximar la distribución binomial por una distribución gaussiana. Se puede demostrar que si n toma los valores $n = 0, 1 \dots N$ según una distribución binomial de parámetro a , entonces la variable aleatoria

$$z \equiv \frac{n - Na}{\sqrt{Na(1-a)}} \quad (5.103)$$

sigue una distribución gaussiana normal, esto es, de media y varianza

$$\langle z \rangle = 0 \quad (5.104)$$

$$\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = 1 \quad (5.105)$$

cuando N tiende a infinito. Hablando de forma menos rigurosa pero más intuitiva esto quiere decir que, deshaciendo el cambio (5.103), si N es suficientemente grande, la variable n sigue una distribución gaussiana de media y varianza iguales a las de la distribución binomial

$$\langle n \rangle = Na \quad (5.106)$$

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Na(1-a) \quad (5.107)$$

y por tanto

$$p(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi Na(1-a)}} e^{-\frac{(n-Na)^2}{2Na(1-a)}} \quad (5.108)$$

En la práctica, la aproximación da buenos resultados para $N \gtrsim 12$. En tal caso podemos escribir la ecuación (5.100) que da el valor de la velocidad estacionaria promedio dentro de la aproximación binomial substituyendo el sumatorio por una integral y la distribución binomial por la gaussiana de manera que

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{V_0}{\gamma L} \int_0^N dn \frac{1}{N \sqrt{2\pi a(1-a)}} e^{-\frac{(n-Na)^2}{2Na(1-a)}} \Theta(Na - n) \left(\frac{1-n}{1-a} - \frac{n}{a} \right) \quad (5.109)$$

Utilizando la expresión de la fuerza en función de n (5.89) podemos hacer el cambio de variable en la integral con lo que tenemos

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-V_0/\gamma La}^{V_0/\gamma L(1-a)} df \Theta(f) \frac{f}{\gamma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} \quad (5.110)$$

donde σ vale

$$\sigma^2 = \frac{V_0}{L(1-a)aN} \quad (5.111)$$

Si N es suficientemente grande, la exponencial estará muy picada en torno a $f = 0$ y no cometemos demasiado error al extender los límites de integración hacia el infinito y escribir

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} df \Theta(f) \frac{f}{\gamma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} \quad (5.112)$$

que no es más que la expresión (5.86) si suponemos que la distribución estacionaria de la fuerza por partícula $f(t)$ es una gaussiana de media nula y varianza σ^2 .

Esta expresión ilustra los dos aspectos principales en los que falla la aproximación binomial (gaussiana). Por un lado, la velocidad estacionaria resulta

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} df \frac{f}{\gamma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\gamma\sqrt{2\pi}} = \frac{V_0}{L\sqrt{2\pi a(1-a)N}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (5.113)$$

que corresponde con el decaimiento como una línea recta mostrado en la figura 5.10 de ejes logarítmicos y que es, como ya habíamos adelantado, mucho más rápido del observado en las simulaciones.

Por otro lado, repitiendo los mismos argumentos sin necesidad de substituir todavía el criterio de control $\alpha(f)$ por ninguna expresión concreta obtenemos

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}}(t) \rangle_{\text{est}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} df \alpha(f) \frac{f}{\gamma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} \quad (5.114)$$

dentro de la aproximación gaussiana. Puesto que $f e^{-f^2}$ es mayor que cero si y solo si $f > 0$, la integral alcanza su máximo si tomamos $\alpha(f) = \Theta(f)$. Esto significa que la aproximación gaussiana predice que la estrategia óptima consiste en tomar precisamente el protocolo de control α que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas, lo que sabemos que no es cierto para N muy grande.

La aproximación gaussiana falla porque la suposición de que $f(t)$ se comporta en estado estacionario como una variable aleatoria gaussiana (cuya única dependencia temporal es la que resulta del hecho de ser aleatoria) no es cierta. La evolución temporal de $f(t)$ es en realidad algo más compleja cuando el número de partículas es suficientemente grande. En la siguiente sección estudiaremos con detalle el comportamiento de $f(t)$ para N grande con el fin de desarrollar una aproximación para la velocidad estacionaria válida en dicho régimen.

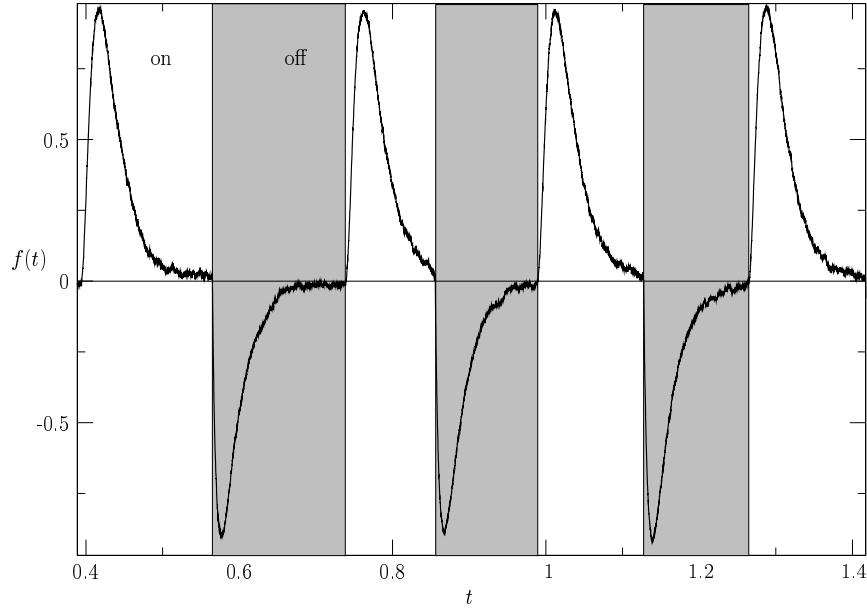


Figura 5.11: Evolución de la fuerza por partícula debida al potencial para un sistema de 10^6 partículas. En blanco los intervalos temporales en los que el potencial permanece conectado (“on”) y en gris en los que el potencial está apagado. En estos últimos, $f(t)$ corresponde a la fuerza por partícula que sentirían si el potencial estuviese conectado, sin embargo, la evolución del sistema se produce con el potencial desconectado.

5.1.10 Análisis III. Aproximación N grande

La figura 5.11 muestra la evolución temporal de la fuerza por partícula $f(t)$ bajo el protocolo de control $\alpha(f) = \Theta(f)$ cuando el sistema está compuesto por un número muy grande de partículas. Los resultados a partir de los cuales se ha realizado la figura corresponden en concreto a una simulación con 10^6 partículas. Como se aprecia en la figura, tras cada encendido (o apagado) del potencial, $f(t)$ se aleja de cero rápidamente y después comienza un decaimiento exponencial que lleva $f(t)$ de nuevo hacia el cero. Cuando la fuerza se encuentra suficientemente cerca del cero es posible que alguna fluctuación (debida al número finito de partículas) produzca un cambio de signo en $f(t)$ e induzca por ello un apagado (o encendido) del potencial, comenzando de nuevo el proceso⁴. Dado que los cambios de estado del potencial son inducidos por las fluctuaciones, y puesto que la magnitud de las fluctuaciones decrece con el número de partículas, cuanto mayor sea el número de partículas N más tiempo pasará entre cada encendido y apagado. Este fenómeno se observa claramente en la figura 5.12 donde se compara la evolución de la fuerza por partícula para dos sistemas diferentes

⁴El sistema se comporta de hecho de manera muy similar a un sistema excitable

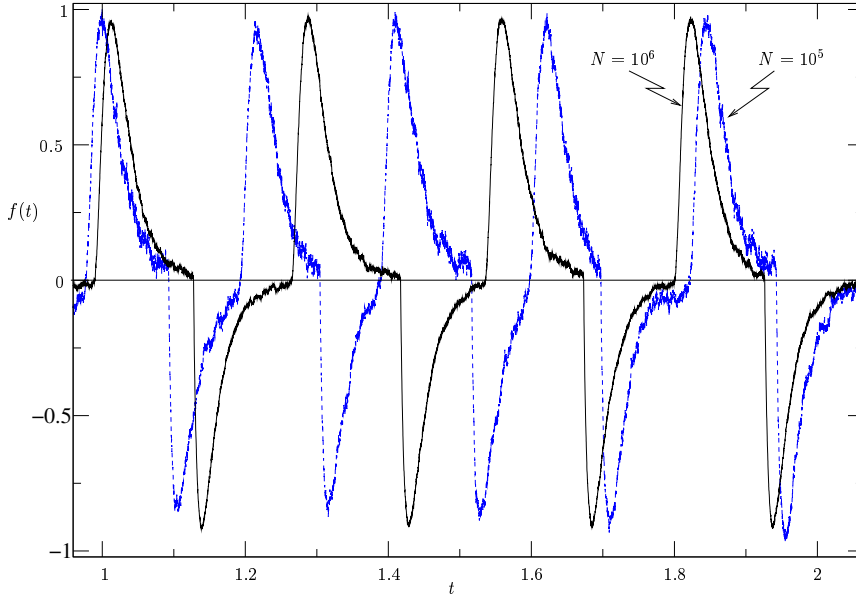


Figura 5.12: Comparación de la evolución de la fuerza por partícula para dos sistemas diferentes de 10^5 y 10^6 partículas, bajo la acción del protocolo de maximización de la velocidad instantánea del centro de masas. La frecuencia de conexión y desconexión es menor para el sistema con mayor número de partículas.

de 10^5 y 10^6 partículas y se aprecia que en el mismo tiempo que el primero realiza cinco ciclos completos de encendido y apagado, el segundo realiza tan solo cuatro.

Si la frecuencia de encendido y apagado del potencial tiende a 0 al crecer el número de partículas, también lo hará la velocidad de las partículas en la ratchet, de modo que $\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle_{\text{est}} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, como se intuye a la vista de la figura 5.9.

Cuando el número de partículas es muy grande, el tiempo entre cada encendido y apagado es tan largo que el sistema casi alcanza la distribución de partículas de equilibrio de cada potencial. Supongamos por ejemplo que el potencial se encuentra apagado durante un tiempo muy largo. Como vimos en la sección 5.1.9, la densidad de probabilidad para una partícula en estado de equilibrio para el potencial desconectado corresponde a una distribución uniforme $\rho_{\text{off}}^{\text{eq}}(x) = 1/L$ en el intervalo $[0, L]$, y por tanto, la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $[0, aL]$ vale $p_0(x \in [0, aL]) = a$. Las partículas no interaccionan de forma directa de modo que si el potencial está desconectado durante suficiente tiempo, las N partículas tenderán a distribuirse de forma uniforme en el intervalo haciendo que el número de ellas que se encuentran en el subintervalo $[0, aL]$ tienda a Na . A medida que esto ocurre, la fuerza por

partícula se acerca a cero, como se deduce de la expresión (5.89). En ese momento una fluctuación puede hacer que $f(t)$ cruce el cero y se conecte el potencial. Para estudiar con detalle cual será la evolución de $f(t)$ a partir de ese momento podemos hacer dos suposiciones:

1. En el momento que ocurre la conexión del potencial, las partículas se encuentran distribuidas uniformemente. Esto es prácticamente cierto puesto que el potencial ha estado desconectado durante mucho tiempo.
2. El número de partículas es tan grande que la evolución de la distribución $\rho(x, t)$ de partículas en el intervalo $[0, L]$ estará bien descrita por la siguiente ecuación de Fokker-Planck de campo medio, correcta en el límite $N \rightarrow \infty$:

$$\gamma \partial_t \rho(x, t) = [-\alpha(t) \partial_x F_{\text{sierra}}(x) + kT \partial_x^2] \rho(x, t) \quad (5.115)$$

con $\alpha(t) = 1$ ya que pretendemos estudiar la evolución a partir del momento en que conectamos el potencial.

La primera suposición nos permite establecer la condición inicial para la ecuación de Fokker-Planck:

$$\rho(x, 0) = \rho_{\text{off}}^{\text{eq}}(x) = \frac{1}{L}. \quad (5.116)$$

Una vez obtenida la solución de forma numérica, podemos obtener la evolución de la fuerza por partícula, que llamaremos $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ ya que corresponde al límite de infinitas partículas y al estado de potencial encendido, promediando con $\rho(x, t)$ la fuerza $F_{\text{sierra}}(x)$ que siente cada partícula si el potencial se encuentra encendido

$$f_{\text{on}}^{\infty}(t) = \langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle = \int_0^L dx \rho(x, t) F_{\text{sierra}}(x). \quad (5.117)$$

La figura 5.13 muestra la evolución de $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$. La figura muestra gran similitud con las “cúspides” que aparecen también en el caso de N finito (figura 5.11, cuando el potencial está encendido). No obstante, la evolución de f_{on}^{∞} es tal que se acerca a 0 exponencialmente desde arriba, tardando un tiempo infinito en alcanzar el 0. La ausencia de fluctuaciones impide que la fuerza por partícula cruce el 0 y se produzca la desconexión del potencial. En el caso de infinitas partículas, el sistema queda atrapado para siempre en el estado del potencial encendido, y por tanto el transporte de partículas resulta nulo en el límite de tiempos largos.

Por otra parte, si comenzamos nuestro razonamiento con el potencial encendido durante un largo tiempo y estudiamos la evolución de la fuerza por partícula a partir de una desconexión del potencial, la situación resulta similar. La distribución $\rho(x, t)$ es de nuevo la solución a la ecuación de Fokker-Planck (5.115) salvo que el parámetro α toma el valor 0 correspondiente al estado desconectado. Por otra parte, la distribución inicial de las partículas es la correspondiente al estado de equilibrio del potencial $V(x)$, es decir

$$\rho(x, 0) = \rho_{\text{on}}^{\text{eq}}(x) = \frac{1}{Z_{\text{on}}} e^{-\frac{V(x)}{kT}} \quad (5.118)$$

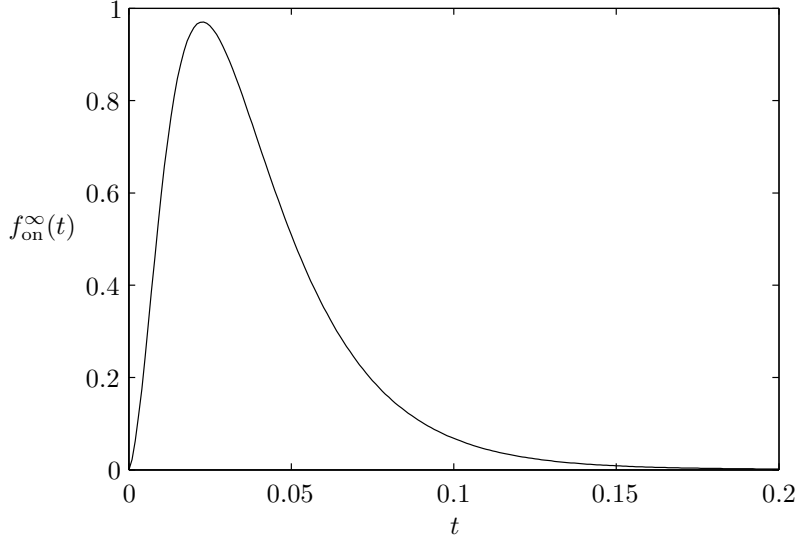


Figura 5.13: Evolución de $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$. Resultado numérico.

La evolución de la fuerza por partícula se calcula de nuevo tomando el promedio de $\langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle$ con la solución para $\rho(x, t)$, obteniéndose la curva $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$, que, como se ve en la figura 5.14 muestra un comportamiento similar a los “valles” que se observan en los tramos de potencial desconectado de la figura 5.11, salvo por la ausencia de fluctuaciones. En una primera fase se aleja de 0 rápidamente y después decae exponencialmente de manera que también el sistema queda en este caso atrapado sin producir cambios de estado en el potencial ni transporte de partículas.

Para evitar recargar la notación, cuando sea preciso referirse al comportamiento de la fuerza por partícula en el límite de infinitas partículas pero no sea necesario especificar el estado del potencial, utilizaremos el símbolo $f^{\infty}(t)$, sin subíndices.

Ya que son las fluctuaciones las que producen los cambios del potencial cuando el número de partículas es finito pero grande, para estudiar este régimen supondremos que la evolución de la fuerza por partícula sigue aproximadamente el comportamiento de $f^{\infty}(t)$ más un término fluctuante

$$f(t) = f^{\infty}(t) + \text{fluctuaciones.} \quad (5.119)$$

Para que una fluctuación consiga provocar un cambio del potencial en la fase de decaimiento exponencial, el término de fluctuaciones ha de ser del orden de $f^{\infty}(t)$. Como las fluctuaciones son pequeñas ya que estamos en el régimen de muchas partículas, los cambios se producen cuando $f^{\infty}(t)$, o $f(t)$ están cercanas a cero. $f(t)$ se encuentra cerca de cero porque la distribución de partículas

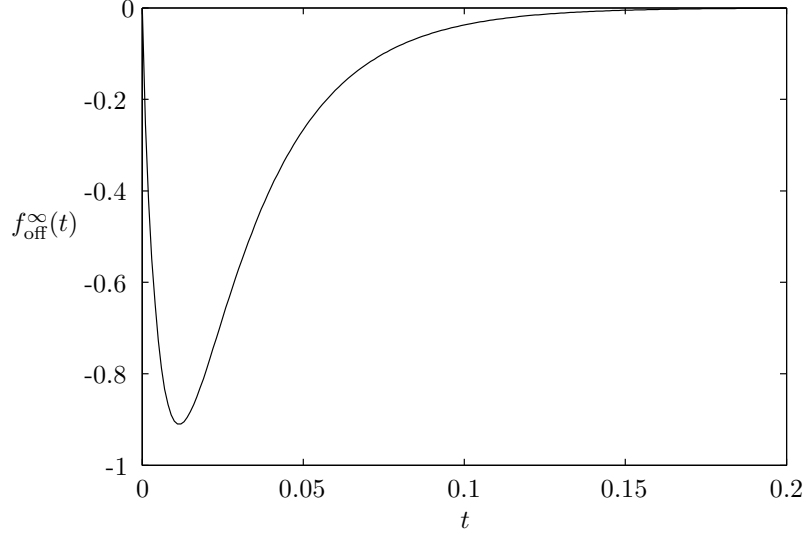


Figura 5.14: Evolución de $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$. Resultado numérico.

se encuentra ya cercana al estado de equilibrio correspondiente al estado del potencial, lo que nos permite calcular el orden las fluctuaciones de la fuerza por partícula promediando con la distribución de equilibrio de una partícula. La fuerza por partícula, para N partículas, es

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i) \quad (5.120)$$

Si el potencial lleva suficiente tiempo encendido (o apagado), podemos suponer que las partículas son estadísticamente independientes y que cada una de las partículas se distribuye según la distribución $\rho^{\text{eq}}(x)$ de equilibrio para el potencial $V(x)$ (o para el potencial apagado). La distribución de probabilidad conjunta para las N partículas será:

$$\rho^{\text{eq}}(\{x_i\}, i = 1 \dots N) = \prod_{i=1}^N \rho^{\text{eq}}(x_i) \quad (5.121)$$

Con esta distribución de las partículas calculamos primero el promedio de $f(t)$:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^L F_{\text{sierra}}(x_i) \rho^{\text{eq}}(\{x_i\}, i = 1 \dots N) dx_i \dots dx_N \quad (5.122)$$

y utilizando la factorización de la distribución tenemos

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^L F_{\text{sierra}}(x_i) \rho^{\text{eq}}(x_i) dx_i \times \prod_{j \neq i}^N \int_0^L \rho^{\text{eq}}(x_j) dx_j \quad (5.123)$$

y por normalización de cada $\rho^{\text{eq}}(x_j)$

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^L F_{\text{sierra}}(x_i) \rho^{\text{eq}}(x_i) dx_i = \frac{N}{N} \int_0^L F_{\text{sierra}}(x) \rho^{\text{eq}}(x) dx \\ &= \langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Escribimos ahora $f(t)^2$

$$f(t)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i) F_{\text{sierra}}(x_j) \quad (5.125)$$

y su valor medio utilizando ya la factorización de la densidad de probabilidad de las N partículas

$$\langle f(t)^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \int_0^L \left[\sum_i \sum_j F_{\text{sierra}}(x_i) F_{\text{sierra}}(x_j) \right] \prod_{k=1}^N \rho^{\text{eq}}(x_k) dx_k. \quad (5.126)$$

Distinguiendo los términos de la suma con $i = j$ y los términos con $i \neq j$, y teniendo en cuenta que las integrales que involucran $\rho(x_k)$ con índice k distinto de i y de j dan como resultado 1 por normalización, escribimos

$$\begin{aligned} \langle f(t)^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \left[\int_0^L \sum_{i \neq j} F_{\text{sierra}}(x_i) F_{\text{sierra}}(x_j) \rho(x_i) \rho(x_j) dx_i dx_j \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \sum_{i=1}^N F_{\text{sierra}}(x_i)^2 \rho(x_i) dx_i \right]. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Basta contar el número de términos iguales de los sumatorios para llegar a

$$\langle f(t)^2 \rangle = \frac{1}{N^2} [(N^2 - N) \langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}}^2 + N \langle F_{\text{sierra}}(x)^2 \rangle_{\text{eq}}] \quad (5.128)$$

que junto con (5.124) nos permite expresar las fluctuaciones de $f(t)$ como

$$\langle f(t)^2 \rangle - \langle f(t) \rangle^2 = \frac{1}{N} [\langle F_{\text{sierra}}(x)^2 \rangle_{\text{eq}} - \langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}}^2] \quad (5.129)$$

es decir, como la fluctuación de $F_{\text{sierra}}(x)$ para una partícula en el estado de equilibrio correspondiente al potencial apagado o encendido, dividido por el número de partículas. De esta manera comprobamos que las fluctuaciones se

anulan en el límite de $N \rightarrow \infty$, como ya habíamos adelantado para explicar la ausencia de transporte en dicho límite.

Tanto si el potencial está encendido como apagado, las fluctuaciones de $F_{\text{sierra}}(x)$ se calculan utilizando la distribución de equilibrio ρ^{eq} , eso sí, hemos de tomar la distribución de equilibrio correspondiente al estado del potencial. El valor medio de $F_{\text{sierra}}(x)$ es

$$\langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}} = \int_0^L \rho^{\text{eq}}(x) F_{\text{sierra}}(x) dx \quad (5.130)$$

Como la fuerza vale $F_- = -V_0/aL$ en el tramo $[0, aL]$ y $F_+ = V_0/(1-a)L$ en el resto del intervalo, podemos escribir el valor medio como

$$\langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}} = F_- \int_0^{aL} \rho^{\text{eq}}(x) dx + F_+ \int_{aL}^L \rho^{\text{eq}}(x) dx. \quad (5.131)$$

Las integrales sobre la distribución de equilibrio no son más que la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $[0, aL]$ y $[aL, L]$ que ya calculamos en la sección 5.1.9 y que valen respectivamente a y $(1-a)$ tanto para la distribución de equilibrio correspondiente al estado conectado como desconectado del potencial. El promedio de $F_{\text{sierra}}(x)$ vale entonces

$$\langle F_{\text{sierra}}(x) \rangle_{\text{eq}} = F_- a + F_+ (1-a) = -\frac{V_0 a}{aL} + \frac{V_0 (1-a)}{(1-a)L} = 0 \quad (5.132)$$

para cualquiera de los dos estados del potencial. Igualmente podemos calcular las fluctuaciones, ya que al ser $F_{\text{sierra}}(x)^2$ constante también en cada uno de los dos tramos

$$\langle F_{\text{sierra}}(x)^2 \rangle = F_-^2 a + F_+^2 (1-a) = \frac{V_0^2}{a(1-a)L^2} \quad (5.133)$$

y substituir en (5.129), de modo que las fluctuaciones de $f(t)$ cuando se encuentra cerca del cero valen:

$$\langle f(t)^2 \rangle - \langle f(t) \rangle^2 = \frac{V_0^2}{NL^2 a(1-a)}. \quad (5.134)$$

Este resultado es el mismo que ya habíamos encontrado al considerar la aproximación gaussiana. Obtenemos el mismo resultado porque hemos utilizado las mismas hipótesis de independencia estadística de las partículas y de distribución según la distribución de equilibrio. La diferencia principal estriba en que en la aproximación de muchas partículas añadimos al comportamiento fluctuante de $f(t)$ el valor $f^\infty(t)$ que describe la evolución temporal del promedio de la fuerza por partícula.

Continuando con la aproximación, para que se produzca un cambio del estado del potencial, tiene que ocurrir una fluctuación de intensidad suficiente para que $f(t)$ cambie de signo, esto es, ocurrirá un cambio con probabilidad apreciable cuando la intensidad de las fluctuaciones sea del orden del valor de $f^\infty(t)$:

$$|f^\infty(t)| \sim \sqrt{\langle f(t)^2 \rangle - \langle f(t) \rangle^2} = \frac{V_0}{L\sqrt{Na(1-a)}} \quad (5.135)$$

Por otra parte, el tramo de decaimiento de $f^\infty(t)$ donde se producen los cambios del estado del potencial, se puede describir adecuadamente, tanto en el caso del potencial encendido como apagado, de forma exponencial, en concreto

$$f_{\text{on,off}}^\infty(t) \simeq C_{\text{on,off}} e^{-\lambda_{\text{on,off}}(t-\tau_{\text{on,off}})} \quad (5.136)$$

donde $C_{\text{on,off}}$ son constantes, $\tau_{\text{on,off}}$ son los tiempos transitorios de la dinámica encendida y apagada, y $\lambda_{\text{on,off}}$ los tiempos característicos de la correspondiente relajación exponencial hacia el estado de equilibrio. Combinando (5.135) y (5.136) obtenemos una aproximación para los tiempos en los que se producen la conexión y desconexión del potencial:

$$t_{\text{on,off}} \simeq c_{\text{on,off}} + \frac{\ln N}{2\lambda_{\text{on,off}}} \quad (5.137)$$

donde

$$c_{\text{on,off}} = \tau_{\text{on,off}} + \frac{1}{\lambda_{\text{on,off}}} \ln C_{\text{on,off}} - \frac{1}{\lambda_{\text{on,off}}} \ln \left(\frac{V_0}{L\sqrt{a(1-a)}} \right). \quad (5.138)$$

Tomando logaritmos en la expresión (5.136)

$$\ln f_{\text{on,off}}^\infty(t) = \ln C_{\text{on,off}} + \lambda_{\text{on,off}}\tau_{\text{on,off}} - \lambda_{\text{on,off}}t \quad (5.139)$$

de modo que haciendo una regresión lineal del tramo lineal del logaritmo de las curvas $f_{\text{on}}^\infty(t)$ y $f_{\text{off}}^\infty(t)$ podemos obtener tanto $\lambda_{\text{on,off}}$ como la combinación $\ln C_{\text{on,off}} + \lambda_{\text{on,off}}\tau_{\text{on,off}}$, y por tanto, los tiempos de encendido y apagado t_{on} y t_{off} .

Una vez obtenida la duración característica de un ciclo completo de encendido y apagado $t_{\text{on}} + t_{\text{off}}$, para calcular la velocidad promedio del centro de masas necesitamos calcular avance Δx de la posición del centro de masas en promedio en cada uno de estos ciclos, ya que

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle \simeq \frac{\Delta x}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} \quad (5.140)$$

La figura 5.15 corresponde a la evolución de la posición del centro de masas para la misma realización con $N = 10^6$ partículas cuya $f(t)$ mostrábamos en la figura 5.11. Como se observa claramente en la figura, el centro de masas solamente se desplaza cuando el potencial se encuentra encendido, cubriendo una distancia Δx_{on} . Cuando el potencial se desconecta, el movimiento de las partículas es puramente difusivo de manera que la posición del centro de masas permanece constante y $\Delta x_{\text{off}} = 0$, de modo que

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle \simeq \frac{\Delta x}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} = \frac{\Delta x_{\text{on}} + \Delta x_{\text{off}}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}} = \frac{\Delta x_{\text{on}}}{t_{\text{on}} + t_{\text{off}}}. \quad (5.141)$$

Como hemos visto, el efecto que produce cambiar el número de partículas consiste principalmente en modificar los tiempos de conexión y desconexión del

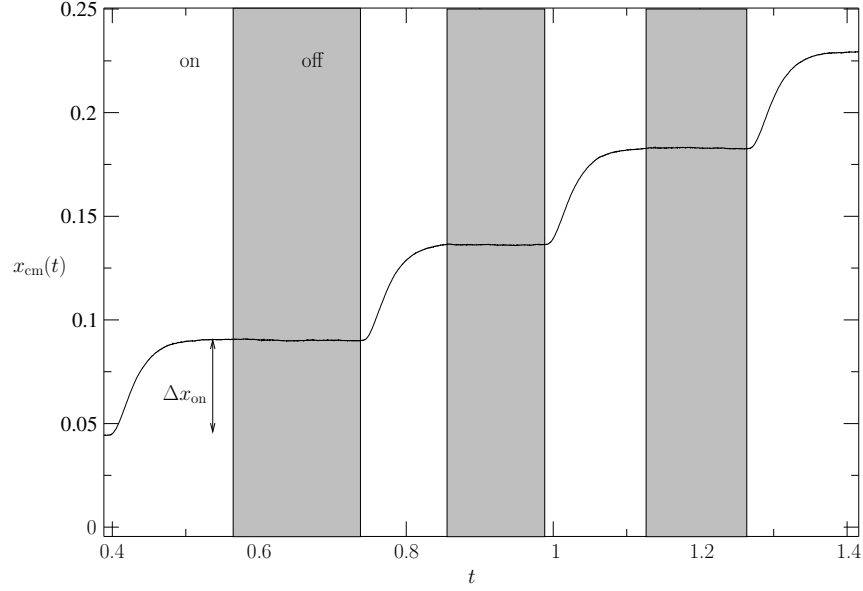


Figura 5.15: Evolución de la posición del centro de masas $x_{\text{cm}}(t)$ para un sistema de 10^6 partículas. 1 sola realización.

potencial. En la figura 5.16 se compara la evolución de la posición del centro de masas para dos realizaciones, una con 10^5 partículas y otra con 10^6 . Aunque los tiempos de conexión y desconexión son bastante más largos en general para el sistema con 10^6 partículas que para el de 10^5 , el avance Δx_{on} en cada ciclo apagado encendido es similar en ambos casos.

Las ecuaciones de Langevin que determinan la posición de las partículas cuando el potencial está encendido toma, como ya vimos, la forma

$$\gamma \dot{x}_i(t) = \alpha(t) F_{\text{sierra}}(x_i(t)) + \xi_i(t); \quad i = 1 \dots N, \quad (5.142)$$

donde $\xi_i(t)$ son un ruidos gaussianos de media nula. Sumando las N ecuaciones y dividiendo por N , obtenemos la ecuación para el movimiento del centro de masas en función de la fuerza por partícula $f(t)$

$$\dot{x}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{\gamma} f(t) + \frac{1}{\gamma N} \sum_{i=1}^N \xi_i(t). \quad (5.143)$$

que integrada sobre un periodo típico de encendido nos da el avance correspondiente Δx_{on}

$$\Delta x_{\text{on}} = \frac{1}{\gamma} \int_{t_{\text{on}}} f(t) dt + \frac{1}{\gamma N} \sum_{i=1}^N \int_{t_{\text{on}}} \xi_i(t) dt. \quad (5.144)$$

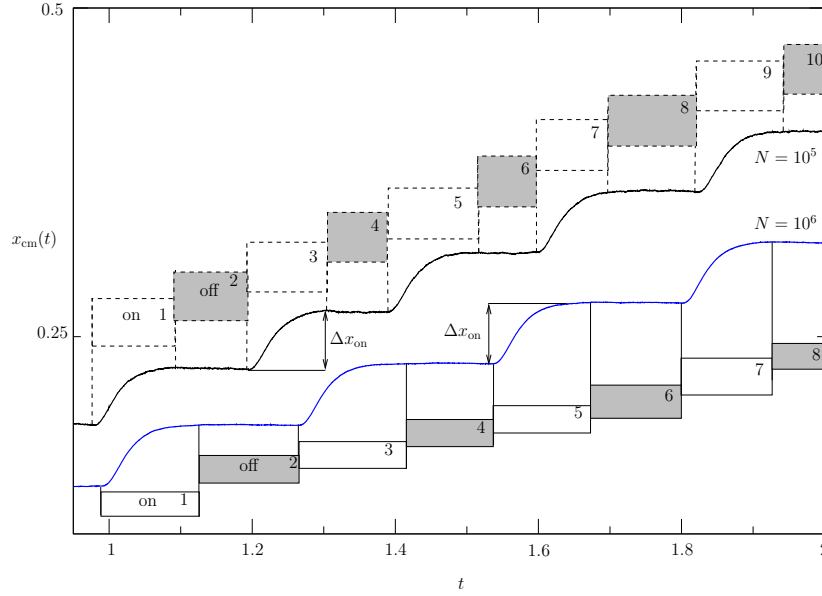


Figura 5.16: Comparación de la evolución temporal de la posición del centro de masas de dos sistemas diferentes de 10^5 y 10^6 partículas. Se han indicado los diferentes periodos de conexión y desconexión del potencial para cada uno de los sistemas. El avance Δx_{on} en un periodo cualquiera de conexión resulta aproximadamente igual para ambos sistemas, pero mientras el sistema con 10^5 partículas realiza 5 ciclos encendido-apagado, el sistema de 10^6 realiza solo 4.

El término correspondiente a la integral del ruido es la suma de posiciones de N movimientos brownianos o procesos de Wiener independientes y por tanto, si N es suficientemente grande corresponde a la posición media de un movimiento browniano que es nula, quedando entonces

$$\Delta x_{\text{on}} \simeq \frac{1}{\gamma} \int_{t_{\text{on}}} f(t) dt \quad (5.145)$$

Es decir, que el avance viene dado por el área bajo $f(t)$ y, como se aprecia en la figura 5.12, no varía demasiado al pasar de 10^5 a 10^6 partículas pues el efecto principal que tiene aumentar N es alargar la cola de decaimiento exponencial hacia 0, que es la parte que menos contribuye a la integral.

Como Δx_{on} no varía prácticamente con el número de partículas, lo podemos calcular para el caso $N \rightarrow \infty$ como la integral de la función $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ que obteníamos de resolver numéricamente la ecuación de Fokker-Planck (5.115) para el potencial encendido:

$$\Delta x_{\text{on}} = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f_{\text{on}}^{\infty}(t) dt \quad (5.146)$$

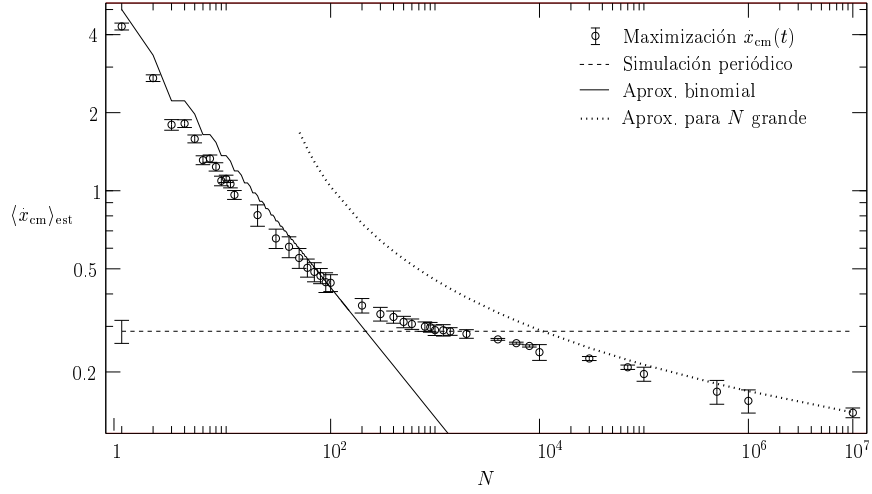


Figura 5.17: Velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario. A los resultados de simulaci3n anteriores y la aproximaci3n gaussiana se ha a~nadi3do la curva correspondiente a los valores predichos por la aproximaci3n para sistemas con gran n~umero de part~iculas.

Utilizando las aproximaciones para t_{on} y t_{off} en (5.141), obtenemos finalmente

$$\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle \simeq \frac{\Delta x_{\text{on}}}{c_{\text{on}} + c_{\text{off}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{on}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{off}}} \right) \ln N}. \quad (5.147)$$

De esta manera, podemos calcular el valor de $\langle \dot{x}_{\text{cm}} \rangle$ para todo N suficientemente grande a partir de datos obtenidos de dos ~unicas integraciones num~ericas de la ecuaci3n de Fokker-Planck con dos condiciones iniciales, que nos permiten obtener $c_{\text{on,off}}$, $\lambda_{\text{on,off}}$ y Δx_{on} , y de los par~ametros del potencial V_0 , L y a . Realizando la integraci3n num~erica de la ecuaci3n y de $f_{\text{on}}^\infty(t)$ y la regi3si3n lineal para $V_0 = 5kT$, $L = 1$, $a = 1/3$, $\gamma = 1$ y $D = 1$, obtenemos los siguientes valores aproximados

$$\begin{aligned} c_{\text{on}} + c_{\text{off}} &= -0.071D^{-1} \\ \lambda_{\text{on}} &= 40D \\ \lambda_{\text{off}} &= 39D \\ \Delta x_{\text{on}} &= 0.047L. \end{aligned} \quad (5.148)$$

La curva resultante de esta aproximaci3n para gran n~umero de part~iculas est~a en buen acuerdo con las simulaciones como se muestra en la figura 5.17, sobre todo en lo que se refiere al decaimiento de la curva con el n~umero de part~iculas, aspecto este donde la aproximaci3n gaussiana fallaba completamente.

Es interesante resaltar que cuando el sistema tiene muchas part~iculas, el criterio de control que maximiza la velocidad instant~anea tiende a comportarse de

forma aproximadamente periódica, pero con tiempos de encendido y apagado más largos que el periodo óptimo. Esto produce un flujo menor que el conseguido por el encendido periódico de periodo óptimo. Para mejorar la eficacia del control sobre sistemas con muchas partículas, podemos modificar el protocolo de manera que se eviten esos tiempos de encendido y apagado demasiado largos. No obstante, la modificación ha de hacerse de forma que el protocolo mantenga la capacidad de aprovechar las fluctuaciones cuando el número de partículas sea menor. La sección 5.2 presenta un protocolo modificado que conjuga ambos comportamientos.

5.2 Criterio basado en umbrales

El sistema que vamos a considerar en esta sección es de nuevo un conjunto de N partículas brownianas en un baño térmico y sometidas a un potencial periódico y asimétrico que puede encenderse y apagarse, con la dinámica descrita por las ecuaciones de Langevin:

$$\gamma \dot{x}_i = \alpha(t)F(x_i) + \xi_i(t), \quad i = 1 \dots N \quad (5.149)$$

donde x_i , γ y ξ_i tienen el significado habitual (ver ecuación (5.51)). El parámetro de control $\alpha(t)$ toma el valor 1 si el potencial se encuentra encendido y 0 si se encuentra apagado, y $F(x) = -V'(x)$ es la fuerza debida al potencial que siente una partícula en la posición x . No obstante, dado que el nuevo protocolo requerirá evaluar la primera y segundas derivadas de la fuerza $F(x)$, consideraremos a partir de ahora un potencial $V(x)$ con un perfil suave, de manera que el cálculo de las derivadas se realice de forma sencilla.

5.2.1 El potencial de perfil suave y los protocolos de control ya estudiados

Con el fin de no introducir demasiadas diferencias respecto del sistema estudiado hasta ahora, se ha elegido el potencial representado en la figura 5.18 en trazo continuo, con expresión analítica

$$V(x) = \frac{2V_0}{3\sqrt{3}} \left[\sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(4\pi \frac{x}{L}\right) \right], \quad (5.150)$$

y cuyas características en lo que se refiere al control basado en la maximización de la velocidad del centro de masas son muy similares a las estudiadas anteriormente para el potencial de dientes de sierra (5.2). Por una parte, este potencial suave tiene un aspecto bastante parecido al potencial de dientes de sierra⁵, como se ve en la figura 5.18.

⁵El potencial original de sierra se ha trasladado $L/6$ en el eje x y $V_0/2$ en el eje y para que se pueda apreciar mejor la similitud.

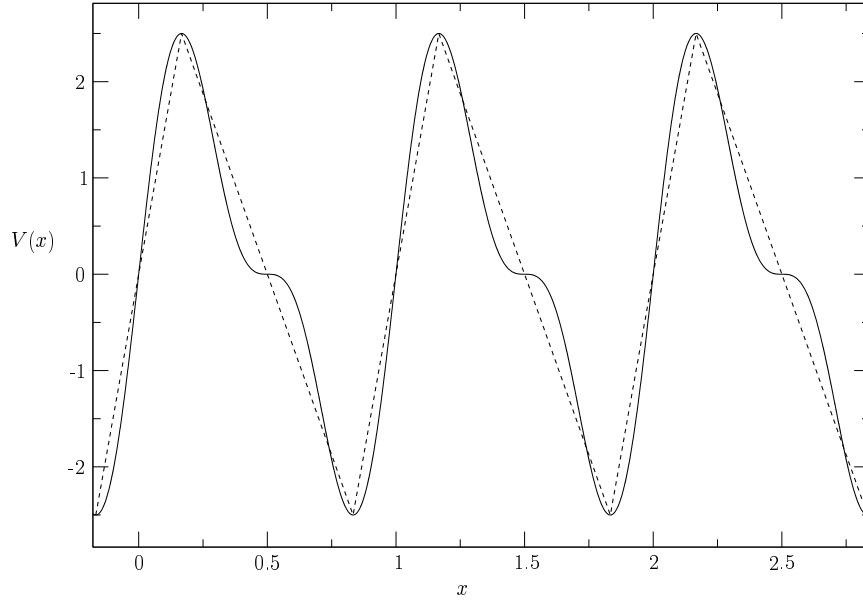


Figura 5.18: Comparación del potencial asimétrico suave (línea continua) y el potencial original de dientes de sierra trasladado (línea discontinua), ambos para intensidad $V_0 = 5$ y periodo $L = 1$.

Pero además el comportamiento de la fuerza por partícula que sentirían las partículas si el potencial se encontrara encendido

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_i^N F(x_i) \quad (5.151)$$

es completamente análogo al que tenía para el potencial de sierra, cuando se aplica el protocolo de control de maximización de la velocidad instantánea:

$$\alpha(t) = \Theta(f(t)) \quad (5.152)$$

a sistemas con un gran número de partículas. La figura 5.19 muestra la evolución temporal de $f(t)$ para un sistema de 10^6 partículas sometidas al potencial suave y bajo la acción de dicho protocolo de control. Observamos claramente el mismo comportamiento de alejamiento rápido del cero seguido de decaimiento exponencial que ya hemos descrito anteriormente para el potencial de sierra (ver figura 5.11). De todo ello se deduce que la velocidad promedio del centro de masas obtenida al aplicar el control sobre el potencial suave dependerá del número de partículas N aproximadamente igual que para el potencial de sierra. De hecho, las simulaciones realizadas para el potencial suave con $V_0 = 5kT$ y $L = 1$ lo confirman. En la figura 5.20 se compara la velocidad producida por

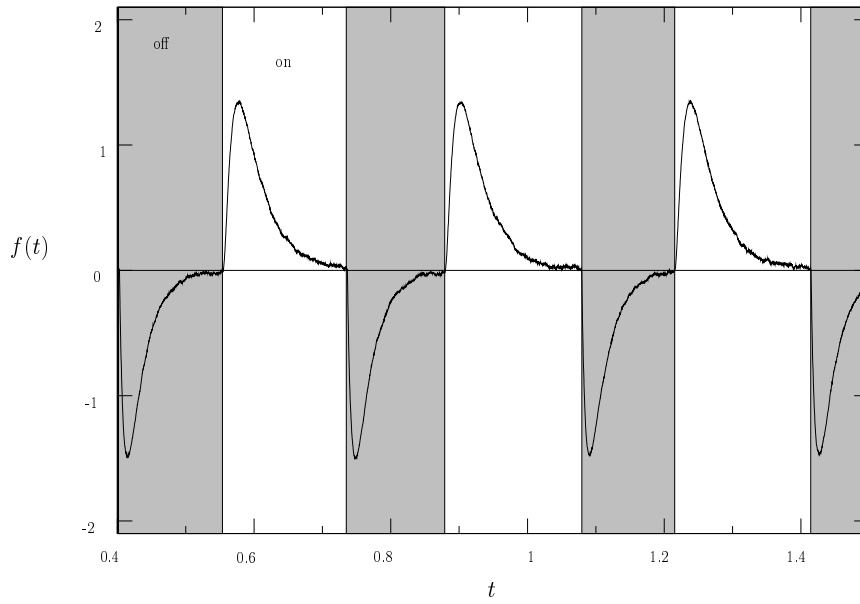


Figura 5.19: Evolución de $f(t)$ para el potencial suave $V(x) = \frac{2 \times 5kT}{3\sqrt{3}} [\sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(4\pi x)]$, en un sistema de 10^6 partículas. Las zonas blancas representan los intervalos temporales en los que el potencial está encendido y las grises en las que permanece apagado debido al control.

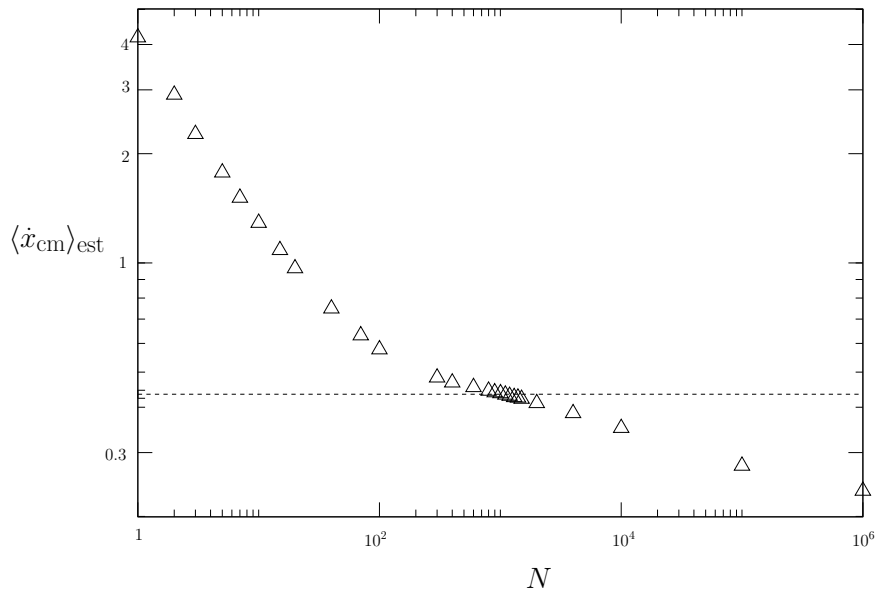


Figura 5.20: Velocidad promedio del centro de masas en estado estacionario para el protocolo de control que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas (triángulos) y para el mejor protocolo periódico (línea discontinua).

el control basado en el signo de $f(t)$ con la velocidad conseguida por el mejor protocolo periódico. Para el potencial suave con $V_0 = 5kT$ y $L = 1$, la velocidad estacionaria máxima alcanzable con un protocolo periódico se consigue apagando el potencial durante un tiempo de $\tau_{\text{off}} = 0.05L^2/D$ y encendiéndolo durante $\tau_{\text{on}} = 0.06L^2/D$. Es decir, en términos del parámetro de control $\alpha(t)$ el protocolo de control periódico óptimo consiste en tomar

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \tau_{\text{on}} \\ 0 & \text{para } \tau_{\text{on}} \leq t < \tau_{\text{off}} \end{cases} \quad (5.153)$$

con $\alpha(t + \tau_{\text{on}} + \tau_{\text{off}}) = \alpha(t)$.

En sistemas con muy pocas partículas el control retroalimentado consigue velocidades estacionarias del centro de masas un orden de magnitud por encima de la velocidad resultante de encender y apagar el potencial periódicamente. Además, la velocidad correspondiente al control decae suavemente hacia cero al aumentar el número de partículas de modo que, a partir de aproximadamente 10^3 partículas, es menor que la velocidad obtenida con el mejor protocolo periódico posible.

La razón de este comportamiento es, como ya explicamos para el potencial de sierra, que debido a la cola de decaimiento de $f(t)$, el sistema se queda atrapado en la dinámica correspondiente a cada estado del potencial hasta que sucede una fluctuación lo suficientemente grande como para provocar el cambio.

5.2.2 El protocolo de control basado en umbrales para la fuerza $f(t)$

La idea fundamental del nuevo control que proponemos a continuación consiste en evitar que el sistema quede atrapado provocando el cambio cuando $f(t)$ cruce unos ciertos umbrales u_{on} y u_{off} distintos de cero, como se muestra en la figura 5.21. En primer lugar, esto hace que la propia evolución del valor medio de $f(t)$ provoque el cambio en sistemas con muchas partículas, no siendo estrictamente necesario que éste se produzca debido a fluctuaciones. De esta manera, los umbrales eliminan las largas colas de decaimiento que se observan en la evolución de $f(t)$ y que tienen el efecto de reducir drásticamente la frecuencia de cambio pero que, como sabemos, contribuyen en pequeña medida al avance de la posición del centro de masas. Las consecuencias que la eliminación de las colas de decaimiento de $f(t)$ tiene sobre el movimiento del centro de masas se aprecian claramente en la figura 5.22.

Por otra parte, utilizando los umbrales podemos modificar los tiempos que el potencial permanece encendido o apagado de forma que en sistemas de muchas partículas se acerquen a los tiempos óptimos de encendido τ_{on} y apagado τ_{off} del protocolo periódico. Esto permitirá que el nuevo control con umbrales recupere el comportamiento del protocolo periódico en el límite $N \rightarrow \infty$, en contraste con el límite de velocidad estacionaria nula del protocolo de control original. Para calcular los umbrales con esta propiedad supondremos que en el límite $N \rightarrow \infty$

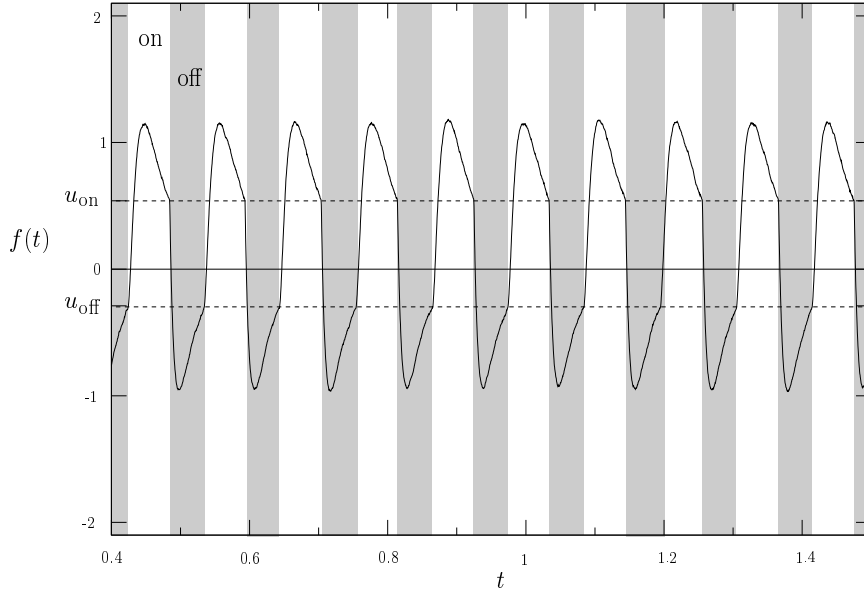


Figura 5.21: Evolución de $f(t)$ para el protocolo de control basado en umbrales y el potencial suave, en un sistema de 10^6 partículas. Las regiones indican el estado conectado (blanco) o desconectado (gris) del potencial.

la evolución de $f(t)$ está bien descrita por $f_{\text{on}}^\infty(t)$ y $f_{\text{off}}^\infty(t)$, con

$$f_{\text{on}}^\infty(t) = \int_0^L dx \rho_{\text{on}}(x, t) F(x) \quad (5.154)$$

y

$$f_{\text{off}}^\infty(t) = \int_0^L dx \rho_{\text{off}}(x, t) F(x) \quad (5.155)$$

donde $\rho_{\text{on}}(x, t)$ y $\rho_{\text{off}}(x, t)$ son las soluciones de la ecuación de Fokker-Planck para la distribución de las partículas $\rho(x, t)$:

$$\gamma \partial_t \rho(x, t) = [-\alpha(t) \partial_x F(x) + kT \partial_x^2] \rho(x, t) \quad (5.156)$$

correspondientes a tomar para $\rho_{\text{on}}(x, t)$

$$\alpha(t) = 1, \forall t \text{ y condición inicial } \rho_{\text{on}}(x, 0) = \frac{1}{L} \quad (5.157)$$

o bien

$$\alpha(t) = 0, \forall t \text{ y condición inicial } \rho_{\text{off}}(x, 0) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{V(x)}{kT}} \quad (5.158)$$

para $\rho_{\text{off}}(x, t)$. Para inducir la desconexión del potencial en tiempo τ_{on} debemos forzar al sistema a apagar el potencial cuando $f(t)$ cruce el valor $u_{\text{on}} = f_{\text{on}}^\infty(\tau_{\text{on}})$.

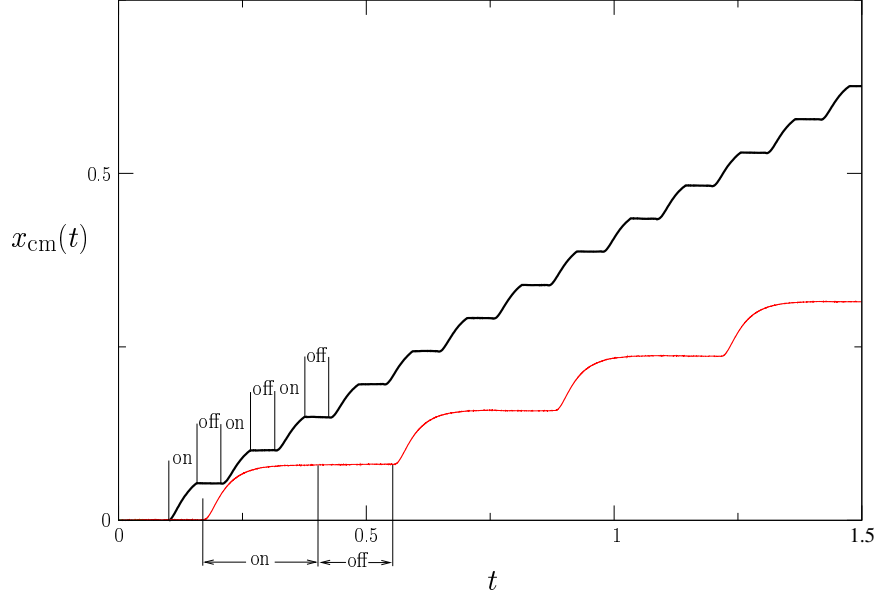


Figura 5.22: Evolución de la posición del centro de masas de dos sistemas diferentes de 10^6 partículas. La realización correspondiente a la línea gruesa evolucionó bajo el control con umbrales mientras que la línea más fina corresponde a la que lo hizo maximizando la velocidad instantánea de su centro de masas. Las etiquetas “on” y “off” indican el estado del potencial conectado y desconectado, respectivamente.

Análogamente, cuando el potencial se encuentra desconectado, debemos conectarlo al cruzar $u_{\text{off}} = f_{\text{off}}^{\infty}(\tau_{\text{off}})$ para que el cambio se produzca en τ_{off} . Realizando la integración numérica de la ecuación de Fokker-Planck para el potencial de suave con $V_0 = 5kT$, $L = 1$, $\gamma = 1$ y $D = 1$, se obtienen las curvas $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ y $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$ representadas en las figuras 5.23 y 5.24, respectivamente. En las figuras también se ha representado el cálculo de los umbrales de forma gráfica para los tiempos óptimos de encendido y correspondientes a dicho conjunto de parámetros, $\tau_{\text{on}} = 0.06L^2/D$ y $\tau_{\text{off}} = 0.05L^2/D$. Numéricamente, los umbrales calculados valen

$$u_{\text{on}} = f_{\text{on}}^{\infty}(\tau_{\text{on}}) = f_{\text{on}}^{\infty}(0.06) \simeq 0.6330kT/L \quad (5.159)$$

$$u_{\text{off}} = f_{\text{off}}^{\infty}(\tau_{\text{off}}) = f_{\text{off}}^{\infty}(0.05) \simeq -0.4396kT/L \quad (5.160)$$

No obstante, para utilizar correctamente los umbrales para la fuerza debemos tomar una precaución adicional. Como se observa en las figuras 5.23 y 5.24 y también en la figura 5.21, la conexión o desconexión del potencial ha de producirse cuando la fuerza por partícula $f(t)$ cruza el correspondiente umbral pero solo cuando lo hace en el sentido apropiado. Por ejemplo, si el potencial está encendido, la desconexión se debe producir cuando $f(t)$ cruce el umbral u_{on} en el

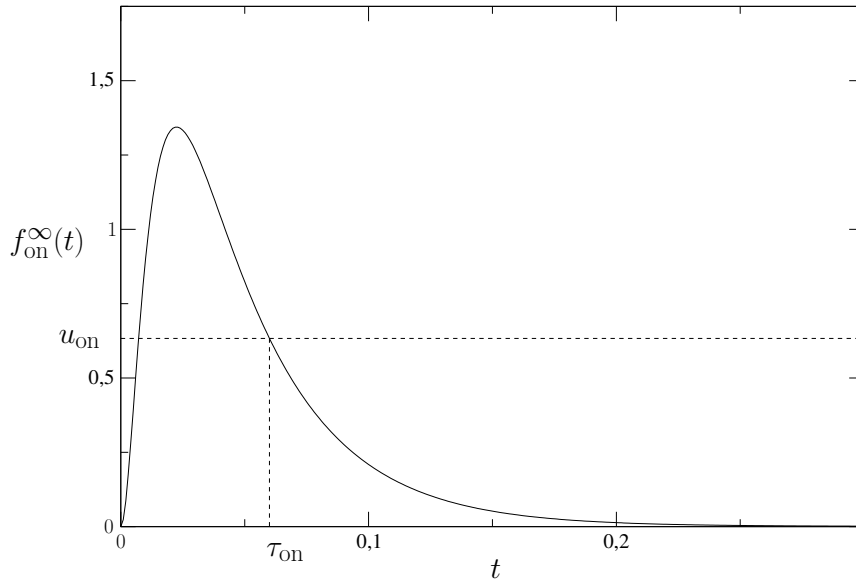


Figura 5.23: Evolución temporal de $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ para el potencial suave. Resultado numérico.

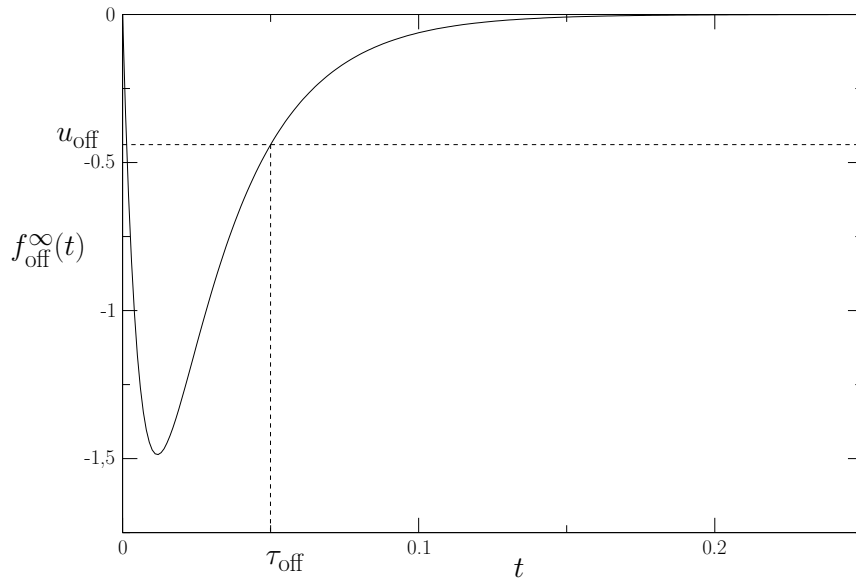


Figura 5.24: Evolución temporal de $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$ para el potencial suave. Resultado numérico.

tramo de decrecimiento hacia cero y no cuando se encuentra creciendo, ya que sería demasiado pronto. Esto se puede conseguir desconectando el potencial solo cuando $f(t)$ cruce u_{on} con pendiente negativa. Equivalentemente, la conexión del potencial ha de hacerse solo cuando $f(t)$ cruce su correspondiente umbral u_{off} con pendiente positiva. Esto significa que para aplicar este criterio de control necesitamos estimar la derivada temporal de la fuerza por partícula y hacerlo además a partir de variables que podemos medir en el sistema, como son las posiciones de las partículas.

Según la definición (5.151), la fuerza por partícula es una función de unas variables estocásticas $x_i(t)$, que dependen a su vez del tiempo. Utilizando la regla de la cadena en la interpretación de Ito, la derivada temporal de $f(t)$ se escribe

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{N} \sum_i^N F'(x_i) \dot{x}_i + \frac{kT}{\gamma N} \sum_i^N F''(x_i) \quad (5.161)$$

Substituyendo (5.149)

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{\gamma N} \sum_i^N \alpha(t) F(x_i) F'(x_i) + \frac{1}{\gamma N} \sum_i^N \xi_i(t) F'(x_i(t)) + \frac{kT}{\gamma N} \sum_i^N F''(x_i) \quad (5.162)$$

Si el número de partículas es muy grande, el término

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \xi_i(t) F'(x_i(t)) \quad (5.163)$$

se puede entender como un promedio a un número muy elevado de realizaciones del ruido, por lo que se aproximará al valor promedio (sobre el ruido). Es decir,

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \xi_i(t) F'(x_i(t)) \simeq \langle \xi(t) F'(x(t)) \rangle \quad (5.164)$$

donde $\xi(t)$ es uno cualquiera de los ruidos y $x(t)$ es el proceso estocástico correspondiente generado por ese ruido según la ecuación de Langevin

$$\gamma \dot{x}(t) = \alpha(t) F(x) + \xi(t) \quad (5.165)$$

interpretada *a la Ito*. En esta interpretación, el promedio del ruido multiplicado por cualquier función de la posición resulta nulo y entonces podemos tomar

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \xi_i(t) F'(x_i(t)) \simeq \langle \xi(t) F'(x(t)) \rangle = 0 \quad (5.166)$$

de modo que

$$\dot{f}_{\text{exp}}(x_i(t)) = \frac{1}{\gamma N} \sum_i^N \alpha(t) F(x_i) F'(x_i) + \frac{kT}{\gamma N} \sum_i^N F''(x_i) \quad (5.167)$$

será un buen estimador para la pendiente de $f(t)$. Con esta estimación de la pendiente de la fuerza por partícula el criterio con umbrales sugiere que el potencial esté encendido siempre que $f(t)$ se encuentre por encima de u_{on} , apagado si está por debajo de u_{off} , y si $f(t)$ está en la región entre ambos umbrales, el potencial debe estar conectado mientras $\dot{f}_{\text{exp}} \geq 0$ y desconectado si $\dot{f}(t)_{\text{exp}} < 0$. Formalmente, el protocolo de control basado en el uso de umbrales para la fuerza por partícula se expresa

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(t) \geq u_{\text{on}}, \\ 1 & \text{si } u_{\text{off}} < f(t) < u_{\text{on}} \text{ y } \dot{f}_{\text{exp}}(x_i) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_{\text{off}} < f(t) < u_{\text{on}} \text{ y } \dot{f}_{\text{exp}}(x_i) < 0, \\ 0 & \text{si } f(t) < u_{\text{off}}. \end{cases} \quad (5.168)$$

La figura 5.25 muestra una simulación en la que se ha aplicado este control sobre un sistema formado por 10^6 partículas utilizando los valores de los umbrales calculados mediante la integración numérica de la ecuación de Fokker-Planck ((5.159) y (5.160)). La simulación confirma que el comportamiento de $f(t)$ es efectivamente el esperado: cuando el potencial está conectado, la fuerza por partícula cruza el umbral u_{on} sin producir la desconexión, alcanza su máximo y empieza a decaer, desconectándose el potencial cuando $f(t)$ cruza el umbral u_{on} en sentido descendente. Mientras el potencial permanece desconectado, la fuerza descende, cruza u_{off} , alcanza su mínimo y posteriormente trapasa de nuevo u_{off} , esta vez en sentido ascendente, provocando la conexión del potencial.

Sin embargo, los tiempos de conexión y desconexión promedio inducidos por estos umbrales resultan ser

$$t_{\text{on}} = (0.047 \pm 0.002)L^2/D \quad (5.169)$$

$$t_{\text{off}} = (0.036 \pm 0.001)L^2/D \quad (5.170)$$

que no son exactamente los tiempos óptimos de encendido y apagado. En consecuencia la velocidad estacionaria del centro de masas resulta levemente inferior a la que se puede alcanzar mediante un protocolo periódico con dichos tiempos o incluso con el protocolo basado en umbrales realizando un cierto ajuste en los valores de los mismos. Probablemente, al forzar al sistema a cambiar de estado del potencial en tiempos tan cortos las distribuciones de partículas no llegan a ser lo suficientemente cercanas al estado de equilibrio, haciendo que $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ y $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$ no describan del todo correctamente la evolución de la fuerza por partícula. Precisamente una de las hipótesis involucradas en el cálculo de $f_{\text{on}}^{\infty}(t)$ y $f_{\text{off}}^{\infty}(t)$ es que las distribuciones iniciales son las de equilibrio del estado contrario del potencial.

Podemos obtener un valor más correcto para los umbrales mediante una simulación de las ecuaciones de Langevin con el sistema de mayor tamaño accesible (del orden de 10^7 partículas) o equivalentemente, una integración numérica de la ecuación de Fokker-Planck, en las que la conexión y desconexión del potencial se produzca de forma periodica con los periodos óptimos. Una vez realizada la integración o simulación y calculada la evolución de la fuerza por partícula

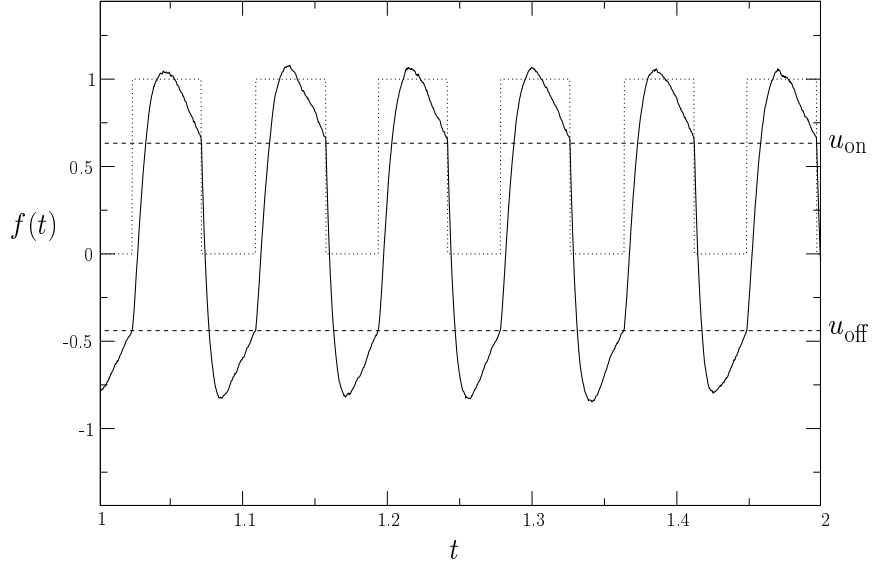


Figura 5.25: Evolución de $f(t)$ para el protocolo basado en umbrales utilizando para los umbrales los valores resultantes de la integración numérica de la ecuación de Fokker-Planck, $u_{\text{on}} \simeq 0.663kT/L$ y $u_{\text{off}} \simeq -0.4396kT/L$. Los umbrales se indican con líneas discontinuas. La línea de puntos corresponde al valor del parámetro de control $\alpha(t)$.

$f(t)$, tomamos los valores de $f(t)$ en los que ocurre el cambio de potencial, de periodo en periodo, tanto para el cambio encendido-apagado ($f(t) > 0$) como apagado-encendido ($f(t) < 0$). Por último, eliminando los valores correspondientes al transitorio inicial y promediando por separado los positivos y los negativos obtenemos los valores del umbral u_{on} y u_{off} respectivamente. Estos valores hallados mediante una simulación con 10^7 partículas para el conjunto de parámetros habitual son

$$u_{\text{on}} = (0.539 \pm 0.004)kT/L \quad (5.171)$$

$$u_{\text{off}} = (-0.298 \pm 0.004)kT/L \quad (5.172)$$

que utilizados en el protocolo con umbrales sobre un sistema con 10^6 partículas producen unos tiempos de apagado y encendido

$$t_{\text{on}} = (0.0598 \pm 0.0008)L^2/D \quad (5.173)$$

$$t_{\text{off}} = (0.050 \pm 0.001)L^2/D \quad (5.174)$$

mucho más cercanos a los tiempos óptimos $\tau_{\text{on}} = 0.06L^2/D$ y $\tau_{\text{off}} = 0.05L^2/D$. De hecho, si comparamos las trayectorias del centro de masas con ambos pares

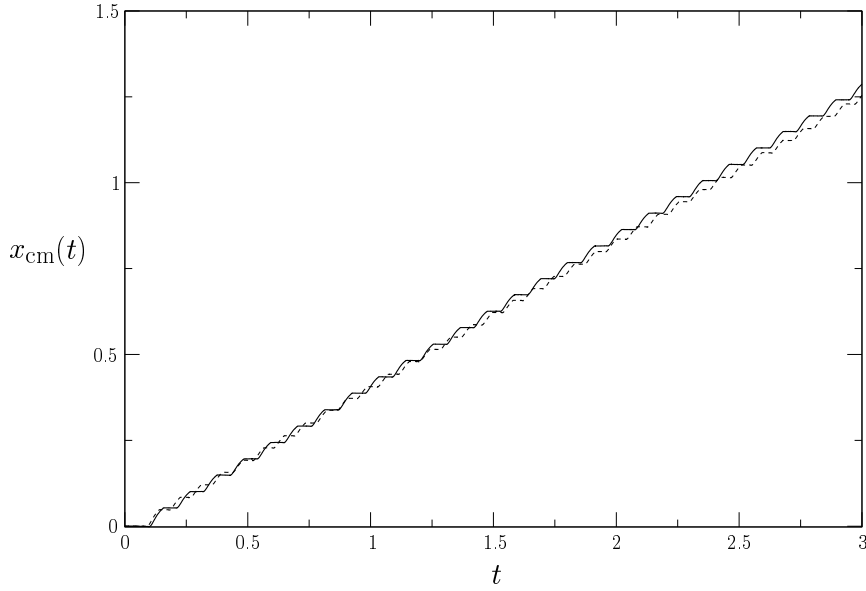


Figura 5.26: Comparación de la evolución de la posición del centro de masas de dos sistemas distintos de 10^6 partículas para el control basado en umbrales con dos conjuntos de umbrales diferentes. La línea continua corresponde al resultado para los umbrales calculados mediante promedio del valor de la fuerza en una simulación con protocolo periódico (ecuaciones (5.171) y (5.172)). La línea discontinua corresponde a los umbrales obtenidos de $u_{on} = f_{on}^{\infty}(\tau_{on})$ y $u_{off} = f_{off}^{\infty}(\tau_{off})$.

de valores de los umbrales vemos como los umbrales que producen tiempos de encendido y apagado más parecidos a los óptimos consiguen una velocidad del centro de masas ligeramente superior, como se muestra en la figura 5.26. Aunque la diferencia es poco significativa, hemos optado por utilizar los umbrales (5.171) y (5.172) para las simulaciones del protocolo de control basado en los umbrales de la sección 5.2.3 que muestra los principales resultados de las mismas.

5.2.3 Resultados

Los resultados de la velocidad estacionaria del centro de masas alcanzada mediante el protocolo de control con umbrales se presentan en la figura 5.27, donde se comparan con los obtenidos mediante el protocolo de control basado en la maximización de la velocidad instantánea y con los correspondientes al mejor protocolo periódico.

El nuevo control consigue una velocidad estacionaria para el centro de masas que no tiende a cero al aumentar el número de partículas, si no que converge a la obtenida mediante el protocolo periódico óptimo. Además, mantiene aproximadamente el mismo comportamiento que el control que maximiza la velocidad

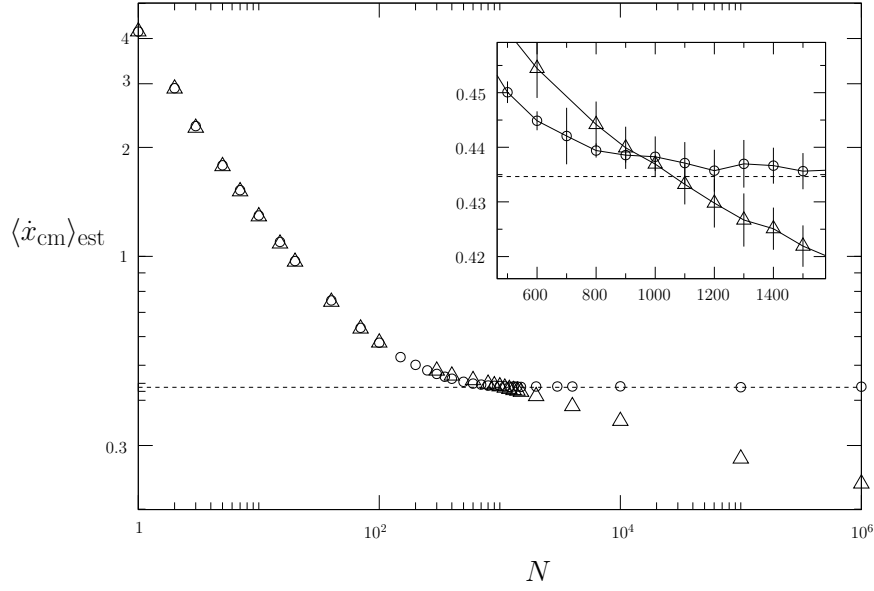


Figura 5.27: Velocidad promedio estacionaria del centro de masas. Comparación del protocolo basado en umbrales (círculos), la maximización de la velocidad instantánea (triángulos) y el mejor protocolo periódico (línea discontinua). La ampliación muestra la región donde las tres estrategias se cruzan. La línea que atraviesa los puntos se ha dibujado como guía para el ojo.

instantánea, para tamaños del sistema pequeños. Por tanto, el control con umbrales funciona siempre igual o mejor que el control periódico óptimo sea cual sea el número de partículas que se controlan.

Puede resultar sorprendente a primera vista que el control con umbrales funcione tan bien para conjuntos pequeños ya que se basa fundamentalmente en argumentos que son válidos para sistemas con un gran número de partículas. Sin embargo, la expresión (5.168) para el control con umbrales indica que si tomamos el valor cero para ambos umbrales, eliminando la región entre ellos, entonces el protocolo es equivalente a la maximización de la velocidad instantánea. Para sistemas pequeños, las fluctuaciones de $f(t)$ son tan grandes que $f(t)$ apenas se sitúa en la región entre los umbrales y ambos protocolos coinciden en la práctica.

5.2.4 Detalles de las simulaciones

Las simulaciones se han llevado a cabo con el mismo esquema numérico de Euler detallado en la sección 5.1.8. Para la implementación del control con umbrales (5.168), es necesario obtener primero una discretización para el parámetro de control $\alpha(t)$. Según (5.168), el parámetro α se calcula utilizando \dot{f}_{exp} que estima el valor de la pendiente de la fuerza por partícula $f(t)$. Lo que el agente

controlador necesita conocer para la elección del parámetro α es si la fuerza por partícula ha cruzado el umbral viniendo desde valores mayores o menores, como consecuencia de su evolución temporal bajo el estado del potencial que estaba vigente cuando se produce el cruce del umbral. Por ello, la discretización más adecuada para el estimador \dot{f}_{exp} es

$$\dot{f}_{\text{exp}}(x_i^k) = \frac{1}{\gamma N} \sum_i^N \alpha_{k-1} F(x_i^k) F'(x_i^k) + \frac{kT}{\gamma N} \sum_i^N F''(x_i^k). \quad (5.175)$$

Dado $\dot{f}_{\text{exp}}(x_i^k)$, el control toma la expresión

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } f_k \geq u_{\text{on}}, \\ 1 & \text{si } u_{\text{off}} < f_k < u_{\text{on}} \text{ y } \dot{f}_{\text{exp}}(x_i^k) \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_{\text{off}} < f_k < u_{\text{on}} \text{ y } \dot{f}_{\text{exp}}(x_i^k) < 0, \\ 0 & \text{si } f_k \geq u_{\text{off}}, \end{cases} \quad (5.176)$$

con f_k la fuerza por partícula que sentirían las partículas en caso de que el potencial estuviera encendido

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_i^N F(x_i^k). \quad (5.177)$$

Una vez obtenido el parámetro de control, la nueva posición de la partícula i -ésima se calcula según

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{\gamma} \alpha_k F(x_i^k) \Delta t + \sqrt{2D\Delta t} z_i \quad (5.178)$$

donde Δt , y z_i son el paso temporal y un número aleatorio generado con distribución normal exactamente igual que en la sección 5.1.8. Los valores de los parámetros del potencial, paso temporal, coeficiente de difusión y demás constantes no se han modificado respecto de los valores utilizados en las anteriores simulaciones (ver sección 5.1.8).

5.2.5 De cómo el nuevo control funciona mejor siendo menos “avaricioso”.

En esta sección analizaremos de una forma más cualitativa y, por ello quizá más general o generalizable, el efecto del control con umbrales sobre el movimiento del centro de masas del sistema, comparándolo con el control que maximiza la velocidad instantánea.

Como ya hemos explicado, y se aprecia claramente en la figura 5.21, en el control con umbrales la desconexión del potencial se produce cuando la fuerza por partícula es todavía positiva, lo que significa que el potencial se desconecta a pesar de que todavía las partículas podrían seguir avanzando hacia la derecha.

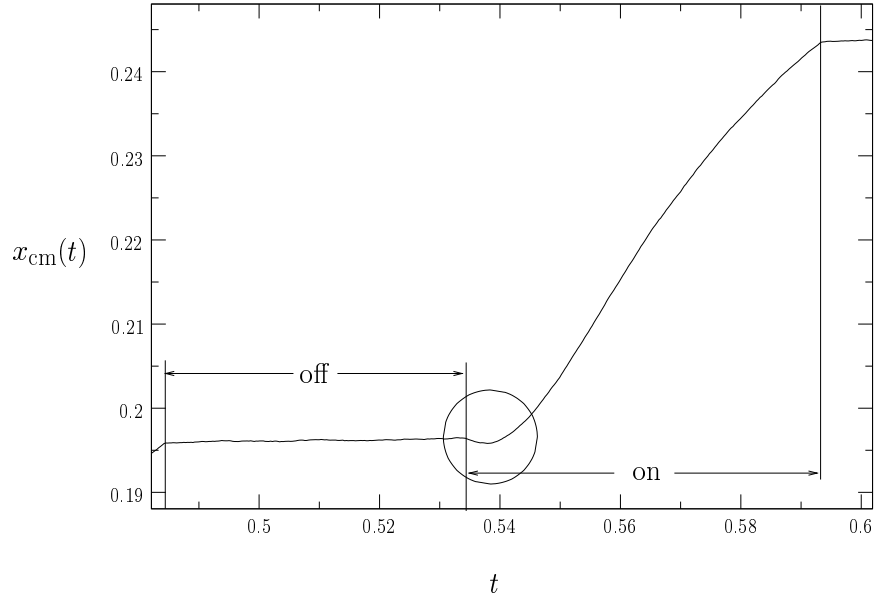


Figura 5.28: Ampliación de una zona de la figura donde se muestra el retroceso inicial de la posición del centro de masas que tiene lugar tras la conexión del potencial en el control con umbrales.

Como vimos en la figura 5.22, que representa la evolución de la posición del centro de masas para el sistema con 10^6 partículas con ambos tipos de control, en el control con umbrales el periodo de conexión es, en efecto, más corto, perdiéndose una cierta parte del avance del centro de masas. Por otra parte, la conexión del potencial se produce cuando la fuerza cruza el umbral $u_{off} < 0$, lo que implica que necesariamente se produce un retroceso inicial del centro de masas, como se puede apreciar en la ampliación 5.28 de uno de los ciclos encendido apagado. Sin embargo, ambos sacrificios se ven compensados finalmente y las partículas acaban moviéndose más rápido.

Por el contrario, la maximización de la velocidad instantánea mantiene el potencial encendido siempre que la velocidad del centro de masas sea positiva, por baja que sea. De esta manera, aunque el avance total en el periodo de encendido es mayor, la última parte produce velocidades muy bajas, ya que el sistema se encuentra cercano al equilibrio, resultando bastante ineficiente mantener el potencial encendido durante tanto tiempo. Pero además, al esperar hasta que la fuerza sea positiva para conectar de nuevo el potencial, los tiempos de apagado, en los que el avance es nulo, resultan demasiado largos. En resumen, el control con umbrales reduce el tiempo de desconexión en el que el sistema no se mueve a la vez que aprovecha sólo la parte inicial del periodo de conexión en la que las partículas avanzan rápidamente, deshaciéndose de la última parte en la que las velocidades son bajas.

En este sistema resulta a la larga más eficiente pararse en cierto momento en lugar de continuar moviéndose en la dirección deseada, mientras que en otros puede ser conveniente retroceder primero una pequeña distancia. Este comportamiento es análogo al que ya observábamos en los juegos paradójicos, en los que estrategias que eligen en ocasiones un juego menos conveniente o incluso perdedor pueden resultar a largo plazo ganadoras mientras que la estrategia avariciosa, que elige en cada turno el juego más beneficioso, puede acabar produciendo pérdidas sistemáticas.

En esta tesis hemos estudiado nuevos aspectos de la rectificación de fluctuaciones térmicas por medio de motores brownianos: el control y optimización de motores colectivos, formados por un gran número de partículas brownianas. Por otra parte, también hemos estudiado estrategias relacionadas con la optimización de juegos de azar colectivos. Estas estrategias, además de servir de inspiración para el estudio del control en motores brownianos colectivos debido a su estrecha relación con los mismos, podrían resultar relevantes en aquellas disciplinas en las que se han sugerido aplicaciones para los juegos.

Los resultados más importantes de la tesis y las principales conclusiones que se derivan de ellos se resumen a continuación. Concluimos identificando algunas cuestiones que han quedado sin respuesta y establecemos posibles líneas futuras de investigación.

6.1 Estrategias y optimización en los juegos paradójicos colectivos

En los juegos paradójicos colectivos, hemos considerado la posibilidad de que los jugadores elijan el juego A o B en cada turno tomando una decisión de forma colectiva. Los resultados y conclusiones principales han sido:

- Tras estudiar dos tipos de estrategias basadas en la maximización de alguna cantidad a corto plazo, la estrategia avariciosa y la de la votación, hemos mostrado que en ocasiones este tipo de estrategias pueden resultar perdedoras. Si los jugadores eligen siguiendo una secuencia periódica predeterminada o incluso al azar, obtendrán ganancias en promedio.
- Hemos identificado el mecanismo responsable de este comportamiento: en ocasiones sacrificar las ganancias a corto plazo puede ser necesario para obtener mejores resultados en el futuro.

En el caso de la votación, cada jugador vota en cada turno por el juego que más le conviene y todos juegan simultánea e independientemente al más votado. Esta votación egoísta resulta inconveniente para la colectividad, a pesar de que es lo mejor para la mayoría, si el conjunto de jugadores es lo suficientemente grande. Un comportamiento similar se encuentra en la paradoja de Braess, en la que la maximización de los beneficios individuales produce malos resultados para el conjunto (Braess, 1969). Todos los jugadores se benefician a largo plazo si muestran cierto grado de cooperación a través de una decisión colectiva, lo que relaciona el modelo con la extensión de los juegos de Parrondo propuesta por Toral (Toral, 2001; Toral, 2002). Las estrategias periódica y aleatoria fuerzan esa cooperación y resultan ganadoras.

La estrategia avariciosa, sin embargo, consiste en elegir el juego que maximiza la ganancia de toda la comunidad en cada turno. Hemos visto cómo, sorprendentemente, esto puede provocar también una tendencia perdedora en el capital medio del grupo. El mecanismo que produce este efecto es bastante general, como demuestra el análisis del sistema continuo de ecuaciones diferenciales para una planta de producción.

- Los tres ejemplos anteriores (estrategia de votación, avariciosa y modelo de la planta de producción) nos muestran que en la optimización de una cierta cantidad en un sistema dinámico, las decisiones que tomemos afectan en general a la evolución del estado del sistema y esto puede comprometer la optimización de dicha cantidad en tiempos posteriores.

Una vez constatado que estas estrategias simples no proporcionan la ganancia máxima, hemos abordado el problema de encontrar la estrategia óptima a largo plazo para los juegos colectivos, tanto para un número finito como infinito de jugadores, obteniendo los siguientes resultados:

- Hemos identificado la estrategia óptima para los juegos con infinitos jugadores y la hemos expresado como un control retroalimentado, es decir, como la secuencia de juegos que debemos elegir en función del estado del sistema en cada turno de modo que las ganancias promedio sean las mayores posibles.
- En el estado estacionario, la estrategia óptima produce la misma ganancia promedio que utilizar la secuencia periódica ABABB.
- Identificando la distribución de infinitos jugadores independientes según su capital con la distribución de probabilidad para el capital de un solo jugador, el resultado anterior nos permite asegurar que la secuencia periódica ABABB es la secuencia que produce mayor pendiente de la ganancia media en estado estacionario en los juegos paradójicos originales. Es por tanto, la secuencia periódica óptima.
- Este ejemplo muestra cómo un problema de control de bucle abierto para un sistema se puede expresar y resolver en términos de un problema de

bucle cerrado pero con una colectividad infinita de sistemas equivalentes al inicial.

- Una generalización del algoritmo utilizado en el caso de infinitos jugadores nos ha permitido encontrar la estrategia óptima para un número finito cualquiera de jugadores. Debido a la interrelación entre juegos y motores brownianos, es posible que las estrategias óptimas para un número finito de jugadores ayuden a identificar la estrategia óptima en la flashing ratchet para un número de partículas finito.
- Las soluciones para 10 y 100 jugadores proporcionadas por dicho algoritmo nos han permitido además responder negativamente a si es posible encontrar una estrategia que sea la óptima independientemente del número de jugadores. No obstante, también es cierto que utilizando la estrategia óptima para 100 jugadores se obtendrá un resultado bastante bueno para cualquier número de jugadores menor que 100.

Por otra parte, los malos resultados de las estrategias avariciosa y de la votación, son un efecto puramente colectivo. Cuando consideramos un solo jugador, ambas son equivalentes y coinciden con la estrategia óptima a largo plazo. Para sistemas con un número pequeño de jugadores, tanto la votación como la estrategia avariciosa producen ciertas ganancias, que van decreciendo a medida que aumentamos el número de jugadores. Hemos desarrollado esta idea en dos direcciones distintas. Por un lado, hemos ideado varios sistemas basados en los juegos colectivos y la estrategia de la votación que podrían resultar relevantes en el modelado de procesos sociales. Por otro, hemos estudiado las implicaciones que estos efectos de número finito podrían tener para el control de motores brownianos colectivos. En el caso de los juegos, hemos desarrollado los siguientes modelos:

- Dictador y oligarquía. Mediante cálculo analítico, corroborado por simulaciones, mostramos que, si los ciudadanos juegan bajo el mandato del dictador, su capital medio crece moderadamente, independientemente de su número. Lo mismo ocurre si en vez del dictador consideramos una oligarquía formada por unos pocos jugadores que eligen por votación el juego para toda la comunidad. Tanto el dictador como la oligarquía fuerzan a los ciudadanos a sacrificar sus ganancias a corto plazo en algunos turnos, lo que resulta finalmente en un beneficio para los ciudadanos si lo comparamos con el resultado perdedor que se obtiene al dejar votar a todo el conjunto.
- Dictador y oligarquía adaptativos. En este caso, el dictador o la oligarquía son en cada turno el individuo o individuos con mayor capital. El dictador adaptativo, tras un corto periodo transitorio, se comporta de forma similar al dictador fijo. Por el contrario, la oligarquía adaptativa muestra un crecimiento del capital medio de la oligarquía muy superior al encontrado en el modelo fijo.

6.2 Control en motores brownianos colectivos

Los efectos del número finito de jugadores plantean la pregunta de cómo la información se puede utilizar para mejorar el rendimiento de un sistema, y de qué manera la información depende del número de partículas a controlar. Con esta idea en mente, se ha estudiado lo que ocurre en un motor formado por N partículas en el que el potencial de dientes de sierra es encendido y apagado a voluntad por un agente externo controlador que posee información sobre la posición de las partículas en todo momento. En concreto, se ha analizado el comportamiento del sistema bajo un protocolo de control que maximiza la velocidad instantánea del centro de masas con los siguientes resultados en lo que se refiere a la velocidad media del centro de masas en el régimen estacionario obtenida:

- El citado protocolo es óptimo en el caso de una partícula y produce mayores velocidades que el encendido y apagado periódico cuando consideramos conjuntos con un número moderado de partículas.
- Se ha realizado un estudio del intercambio de energía entre la partícula browniana, el baño térmico y el agente externo cuando este opera el motor utilizando el protocolo de control. Hemos demostrado que este motor controlado cumple la Segunda Ley de la termodinámica y no constituye un demonio de Maxwell. Como consecuencia, cuando el motor desarrolla potencia su eficiencia es necesariamente menor que la unidad.
- Si el número de partículas es grande, el protocolo de la maximización de la velocidad instantánea produce menor transporte que el encendido periódico. Es más, la velocidad estacionaria obtenida mediante el control tiende a cero a medida que el número de partículas crece.
- El control utiliza las fluctuaciones del sistema para aumentar la velocidad promedio. Como la magnitud de las fluctuaciones decrece a medida que aumenta el número de partículas en el sistema, también lo hace la velocidad del centro de masas obtenida por el control. Para un número suficientemente grande de partículas, el control hace que el sistema quede atrapado en una de las dos dinámicas correspondientes al estado del potencial conectado o desconectado. La ausencia o la baja frecuencia de cambios encendido-apagado impide que el motor transporte partículas.
- Basándonos en el análisis del protocolo anterior, proponemos una modificación del control que evite que el sistema quede atrapado, que denominamos control basado en umbrales. Este nuevo protocolo es capaz de producir un mayor transporte en sistemas con un gran número de partículas. Además, el nuevo protocolo mantiene el comportamiento del anterior para conjuntos pequeños de partículas a la vez que consigue corrientes similares a las producidas por el encendido periódico cuando consideramos un gran número de partículas.

- De hecho, el control basado en umbrales resulta mejor o igual que el mejor protocolo periódico posible independientemente del número de partículas que sea necesario controlar.
- El protocolo basado en umbrales permite la desconexión del potencial cuando las partículas todavía están avanzando. Es más, la conexión del potencial produce un retroceso inicial de la posición del centro de masas. La dinámica del sistema es tal que ambos sacrificios se ven compensados rápidamente y al final las partículas se mueven a mayor velocidad que en el protocolo en el que se maximiza la velocidad instantánea. De nuevo tenemos un sistema dinámico en el que una decisión que no es la óptima a corto plazo produce a largo plazo mejores resultados que esta.

Por último, y con un carácter más general concluimos que:

- Los juegos paradójicos constituyen modelos sencillos en los que estudiar problemas relacionados con la optimización de sistemas dinámicos, control en presencia de restricciones y cuestiones relacionadas con estrategias y toma de decisiones colectivas en sistemas con frustración.
- Debido a la relación entre los juegos y la flashing ratchet, los juegos contribuyen a la comprensión de nuevos fenómenos que resultan de interés también en el campo de los motores brownianos.
- Los problemas relacionados con el control de motores brownianos podrían ser relevantes en las disciplinas en las que encontramos sus aplicaciones principales, la nanotecnología y la biología molecular. Por tanto, es necesaria una teoría de control de motores brownianos o, cuando menos, la investigación sobre algunos de los efectos que el control pueda tener en el rendimiento de estos sistemas.

6.3 Cuestiones abiertas y líneas futuras de investigación

Muchas cuestiones planteadas en este trabajo quedan aún sin resolver y han surgido algunas nuevas, tanto en lo que se refiere a los juegos como al control de la flashing ratchet. Algunas de ellas que hemos juzgado importantes son:

- Es posible que la secuencia óptima de los juegos originales y la estrategia óptima en los juegos colectivos con más de un jugador pueda calcularse de forma analítica. El conocimiento del sistema que nos proporciona la resolución numérica de ambos problemas podría contribuir a esta tarea.
- Aunque el protocolo basado en umbrales proporciona un flujo de partículas cercano al óptimo tanto en el límite de pocas partículas como el de gran número de ellas, identificar el protocolo óptimo en lo que se refiere al transporte de un número cualquiera de partículas en la flashing ratchet sigue siendo un problema abierto.

- Hemos estudiado cómo la información sobre la posición de las partículas se puede utilizar para mejorar el transporte de partículas en la flashing ratchet, lo que nos ha proporcionado un conocimiento más detallado del motor en su versión colectiva. No obstante, cómo utilizar esta información para mejorar la eficiencia de este motor y si es posible diseñar un protocolo de conexión y desconexión que constituya un demonio de Maxwell, son cuestiones cuyas respuestas pueden contribuir a un conocimiento más profundo de las implicaciones de la Segunda Ley de la Termodinámica. Otras cuestiones directamente relacionadas con esta son, por ejemplo, si el protocolo de control basado en la maximización de la velocidad instantánea del centro de masas puede llegar a comportarse como un demonio de Maxwell para algún número de partículas superior a uno.
- Por último, el diseño de protocolos de control diferentes destinados a otros objetivos, como por ejemplo, segregación de partículas, resultaría interesante de cara a las aplicaciones tecnológicas.

[A]

Propiedades del proceso de Wiener

Con la definición (1.19) el proceso de Wiener tiene las siguientes propiedades:

- i. El proceso $W(\tau) \equiv W(t + \tau) - W(t)$ es un proceso de Wiener para cada t fijo y $\tau \geq 0$. De la definición,

$$W(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t + \tau) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t + \tau) - X(t), \quad (\text{A.1})$$

ya que ambos límites existen. Si definimos el proceso $X^*(\tau) \equiv X(t + \tau) - X(t)$, podemos escribir

$$X^*(\tau) = X(t + \tau) - X(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma \sqrt{\Delta t} \eta(i \Delta t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sigma \sqrt{\Delta t} \eta(i \Delta t) \quad (\text{A.2})$$

con $t + \tau = m \Delta t$ y $t = n \Delta t$. Los términos hasta $i = n$ son iguales y se eliminan, quedando

$$X^*(\tau) = \sum_{i=n}^{m-1} \sigma \sqrt{\Delta t} \eta(i \Delta t) = \sum_{i=0}^{m-1-n} \sigma \sqrt{\Delta t} \eta((i + n) \Delta t) \quad (\text{A.3})$$

Según la definición de $\eta(t)$, $\eta((i + n) \Delta t)$ es un proceso de Bernoulli con

$$\eta((i + n) \Delta t) = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

para cualquier valor de i . De modo que, comparando con la ecuación (1.22), el proceso $X^*(\tau)$ es, respecto de τ , un proceso con las mismas características que $X(t)$ respecto de t . En concreto, $X^*(\tau)$ tiene valor inicial $X^*(\tau = 0) = 0$; sus incrementos $X^*(\tau + \Delta t) - X^*(\tau)$ son variables independientes; su valor medio es $\langle X^*(\tau) \rangle = 0$ y su varianza $\langle X^*(\tau)^2 \rangle = \sigma^2 \tau$.

Por tanto, su límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, es un proceso de Wiener $W(\tau)$, con media nula y varianza

$$\langle W(\tau)^2 \rangle = \sigma^2 \tau \quad (\text{A.5})$$

tal y como queríamos demostrar.

- ii. $W(t + \tau) - W(t)$ es independiente de $W(t)$, $\forall \tau > 0$.

La demostración es similar a la anterior. Según la definición del proceso $X(t)$, tomando $\tau = n\Delta t$, podemos escribir

$$X(t + n\Delta t) - X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta(t + i\Delta t) \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (\text{A.6})$$

El segundo miembro de la ecuación es independiente de $X(t)$ ya que todas las variables aleatorias $\eta(t + i\Delta t)$, ($m \geq 0$), son independientes de $X(t)$ por construcción. Además, son independientes no importa como de pequeño sea Δt por lo que resultan independientes en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ con $\tau = n\Delta t$.

- iii. $\langle W(t)(W(t + \tau) - W(t)) \rangle = \langle W(t) \rangle \langle W(t + \tau) - W(t) \rangle = 0$.

La primera igualdad se basa en la propiedad anterior y la segunda en que el proceso de Wiener tiene media nula.

- iv. $\langle W(t + \tau)W(t) \rangle = \sigma^2 t$, siempre que $\tau \geq 0$.

De la propiedad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (W(t + \tau) - W(t))W(t) \rangle = \langle W(t + \tau)W(t) \rangle - \langle W(t)^2 \rangle \Rightarrow \\ &\langle W(t + \tau)W(t) \rangle = \langle W(t)^2 \rangle = \sigma^2 t \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

- v. $\langle W(t)W(t') \rangle = \sigma^2 \min(t, t')$

que no es más que una manera alternativa de escribir la propiedad (iv).

Otras propiedades interesantes del proceso de Wiener son

- vi. Las trayectorias del proceso de Wiener son “casi seguro” continuas. Es decir, el conjunto de trayectorias discontinuas tiene probabilidad (medida) nula.

- vii. Las trayectorias del proceso de Wiener no son de variación acotada sobre ningún intervalo temporal acotado. Mas concretamente, si tomamos un intervalo temporal $[a, b]$ y lo dividimos en subintervalos iguales de tamaño $\delta = \frac{1}{2^n}(b - a)$, entonces

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |W(a + (k+1)\delta) - W(a + k\delta)| \rightarrow \infty, \text{ cuando } \delta \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)} \quad (\text{A.8})$$

Esto es algo similar a lo que ocurre con el famoso ejemplo de la “costa de Inglaterra” utilizado frecuentemente para introducir la geometría fractal,

cuya longitud crece indefinidamente al reducir la escala con la que medimos. Más tarde veremos las consecuencias que esta propiedad tiene para las ecuaciones diferenciales estocásticas, que se definen a partir del proceso de Wiener. Baste por ahora decir que la variación no acotada implica que las trayectorias no son diferenciables, salvo quizá en conjuntos de medida nula.

Podemos entender estas dos últimas propiedades utilizando el siguiente argumento, aunque por supuesto no constituye una prueba rigurosa, que resultaría por otra parte demasiado técnica e innecesaria para los propósitos de esta introducción. Una prueba más rigurosa se puede encontrar en (Kloeden y Platen, 1992).

Según la propiedad (iv), sabemos que los incrementos al cuadrado del proceso de Wiener valen en media

$$\langle (W(t+\delta) - W(t))^2 \rangle = \delta, \text{ con } \delta \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

donde hemos tomado $\sigma^2 = 1$ para simplificar la notación, aunque el argumento es igualmente válido para cualquier valor de la constante. Tomando $\delta = 2^{-n}(b-a)$ se puede demostrar entonces que

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} (W(a+(k+1)\delta) - W(a+k\delta))^2 \rightarrow \sum_{k=0}^{2^n-1} \delta = (b-a), \text{ cuando } \delta \rightarrow 0 \quad (\text{A.10})$$

donde la convergencia es, al menos, en sentido cuadrático medio¹. Este resultado es razonable ya que si uno suma N variables aleatorias independientes con la misma media μ , a medida que crece N , el resultado de la suma se parece cada vez más a $N\mu$.

Se puede demostrar que la convergencia es más fuerte aún, y en realidad tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} (W(a+(k+1)\delta) - W(a+k\delta))^2 \rightarrow (b-a), \text{ con probabilidad 1,} \quad (\text{A.11})$$

lo que hablando de forma poco rigurosa significa que los incrementos cuadrados $(W(t+\delta) - W(t))^2$ son de orden δ y los incrementos del proceso de Wiener, de orden $\sqrt{\delta}$. Utilizando este resultado podemos calcular con el proceso de Wiener de forma sencilla.

Para empezar, recuperamos la relación

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} (W(a+(k+1)\delta) - W(a+k\delta))^2 \sim \sum_{k=0}^{2^n-1} \delta = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n}(b-a) = (b-a), \text{ si } \delta \rightarrow 0 \quad (\text{A.12})$$

¹Esto quiere decir que el valor cuadrático medio del miembro de la izquierda converge al valor cuadrático medio del miembro de la derecha en el límite.

Sin embargo, para la variación total tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^n-1} |W(a + (k+1)\delta) - W(a + k\delta)| &\sim \sum_{k=0}^{2^n-1} \sqrt{\delta} = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n/2}(b-a) = \\ &= 2^n 2^{-n/2}(b-a) = 2^{n/2}(b-a) \rightarrow \infty \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ } (\delta \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Y para la derivada tenemos

$$\frac{W(t+\delta) - W(t)}{\delta} \sim \frac{\sqrt{\delta}}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty \text{ cuando } \delta \rightarrow 0, \quad (\text{A.14})$$

lo que sugiere que el proceso de Wiener efectivamente no es derivable.

[B]

Integrales estocásticas

Para funciones $F(x)$ no diferenciables, es posible definir la integral de Riemann-Stieltjes de una función $f(x)$ en un intervalo acotado $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \quad (\text{B.1})$$

donde el punto $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ es arbitrario y los puntos x_i son una cierta partición del intervalo $[a, b]$. El límite del sumatorio existe siempre que la partición se haga de forma que δ , la distancia máxima entre dos puntos sucesivos verifique

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{B.2})$$

y las funciones $f(x)$ y $F(x)$ cumplan ciertos requisitos. Por ejemplo, resulta esencial que $F(x)$ sea de variación acotada en $[a, b]$, esto es,

$$\sup \sum_{i=1}^n |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \infty \quad (\text{B.3})$$

para cualquier partición x_i del intervalo $[a, b]$ tal que $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, si $f(X)$ es continua, el límite en (B.1) existe con $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ arbitrario. Si existe la derivada $F'(x)$ y además es continua en $[a, b]$ entonces el límite existe también y la integral coincide con la integral de Riemann

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx. \quad (\text{B.4})$$

Como hemos visto en el apéndice A, el proceso de Wiener es de variación no acotada en un intervalo acotado, de modo que no podemos interpretar $\int_a^b dW$ como una integral de Riemann-Stieltjes. En realidad, las integrales basadas en los incrementos $dW(t)$ del proceso de Wiener son un tipo diferente de integrales

que recibe el nombre de integrales estocásticas. La regularización de integrales estocásticas del tipo

$$\int_0^t G(t') dW(t') \quad (\text{B.5})$$

donde $G(t')$ es en general un proceso estocástico y $W(t)$ es un proceso de Wiener, se basa en una modificación de la integral de Riemann-Stieltjes. Si $W(t)$ es de variación no acotada, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G(t_i^*) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (\text{B.6})$$

no tiene por qué existir.

Sin embargo, Ito demostró que, bajo ciertas condiciones para G , dicho límite no existe en el sentido de que, aunque la suma es convergente, su valor ya no es independiente del valor que tome $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$.

Para dar sentido a la integral, Ito propuso especificar el punto $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$, y en particular, tomar el extremo inferior del intervalo,

$$t_i^* = t_i, \quad (\text{B.7})$$

y definir la integral (de Ito) $I(G)$ como el límite

$$I(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}, \quad (\text{B.8})$$

donde los t_i forman parte de una partición cualquiera $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t$ del intervalo de integración $[0, t]$ tal que la distancia máxima entre cualquiera de dos puntos consecutivos $\delta = \max_{0 \leq i \leq n} x_{i+1} - x_i$ tiende a cero con $n \rightarrow \infty$. En esas circunstancias, y como veremos a continuación, el límite existe (o la serie es convergente) en sentido cuadrático medio. Para ello, las condiciones que debe cumplir el integrando $g(t)$ son

- i. No ser “anticipativo”, es decir, que $G(t)$ depende de eventos (del proceso de Wiener) que han ocurrido en t o en tiempos anteriores.
- ii. El valor cuadrático medio de $G(t)$ es continuo en t e integrable (Riemann) en el intervalo de integración.

Entonces, para cada sumando en (B.8) tenemos

$$\langle G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} \rangle = \langle G(t_i) \rangle \langle \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} \rangle = 0 \quad (\text{B.9})$$

y

$$\begin{aligned} \langle G(t_i)^2 \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}^2 \rangle &= \langle G(t_i)^2 \rangle \langle \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}^2 \rangle \\ &= \langle G(t_i)^2 \rangle (t_{i+1} - t_i), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

porque los incrementos del proceso de Wiener no dependen de lo que haya ocurrido hasta t_i unido a la propiedad (i) de $G(t)$. Además, debido también a

dicha propiedad de $G(t)$ y a la independencia de los incrementos del proceso de Wiener:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\sum_{i=1}^n G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} \right)^2 \right\rangle &= \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} G(t_j) \{W(t_{j+1}) - W(t_j)\} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle G(t_i)^2 \rangle \langle \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}^2 \rangle \\
&\quad + 2 \sum_{i>j} \langle G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} G(t_j) \{W(t_{j+1}) - W(t_j)\} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle G(t_i)^2 \rangle (t_{i+1} - t_i) \\
&\quad + 2 \sum_{i>j} \langle G(t_i) G(t_j) \{W(t_{j+1}) - W(t_j)\} \rangle \langle W(t_{i+1}) - W(t_i) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^n \langle G(t_i)^2 \rangle (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

donde la penúltima igualdad se deduce de la independencia de $W_{i+1} - W_i$ tanto de $W_{j+1} - W_j$, como de $G(t_j)$ y $G(t_i)$ ya que $i > j$. De esta manera, las sumas parciales de la integral de Ito $I^n(G)$

$$I^n(G) = \sum_{i=1}^n G(t_i) \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} \tag{B.12}$$

tienen valor medio nulo, y valor cuadrático medio

$$\langle I^n(G)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle G(t_i)^2 \rangle (t_{i+1} - t_i). \tag{B.13}$$

En el límite $n \rightarrow \infty$ (y $\delta \rightarrow 0$), el miembro de la derecha de (B.13) tiende a la integral de Riemann de $\langle G(t)^2 \rangle$ que siempre existe por la propiedad (ii) de $G(t)$ y, por tanto,

$$\langle I(G)^2 \rangle = \int \langle G(t)^2 \rangle dt. \tag{B.14}$$

De manera que las sumas parciales a partir de las cuales hemos definido la integral de Ito convergen en sentido cuadrático medio, dando sentido a la integral.

Con esta definición, la integral de Ito comparte con las integrales de Riemann algunas propiedades como la linealidad en el integrando y además tiene algunas

propiedades útiles. En particular, nótese que si $X(t)$ es el proceso estocástico definido como

$$X(t) = \int_0^t G(X(t')) dW(t') \quad (\text{B.15})$$

y tomamos $G(X(t)) = g(X(t))$, con $g(x)$ analítica en su argumento, entonces la integral de Ito $X(t)$ como función de su límite superior t resulta independiente de los incrementos futuros $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ del proceso de Wiener. En efecto, con la definición de la integral de Ito, $X(t)$ es

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g(X(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (\text{B.16})$$

con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = t$, de modo que $X(t)$ solo depende de sucesos del proceso de Wiener acaecidos en tiempos s , con $s \leq t$. Por otra parte, si tomamos cualquier función analítica $a(x)$ e interpretamos la expresión

$$a(X(t))dW(t) \quad (\text{B.17})$$

a la Ito, entonces equivale al límite de

$$a(X(t))(W(t+dt) - W(t)) \quad (\text{B.18})$$

donde X se evalúa precisamente en el punto t . Pero el incremento del proceso de Wiener $dW(t)$ es independiente de lo que haya ocurrido hasta t , y por tanto, independiente de $X(t)$ o cualquier función analítica a de $X(t)$, de modo que tomando valor medio tenemos

$$\begin{aligned} \langle a(X(t))dW(t) \rangle &= \langle a(X(t))(W(t+dt) - W(t)) \rangle \\ &= \langle a(X(t)) \rangle \langle (W(t+dt) - W(t)) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Esta propiedad de la integral de Ito resultará, por ejemplo, muy conveniente para deducir la ecuación que cumple la densidad de probabilidad de $X(t)$, la ecuación de Fokker-Planck, como veremos en la sección C. Sin embargo, la integral de Ito tiene la peculiaridad de que

$$\int_0^\infty W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 t \neq \frac{1}{2}W(t)^2, \quad (\text{B.20})$$

donde $\langle W(t)^2 \rangle = \sigma^2 t$. Es decir, que la integral de Ito no respeta la regla de la cadena del cálculo determinista. La demostración de (B.20) se sigue del siguiente reordenamiento de las sumas parciales

$$\sum_{i=1}^n W(t_i)\{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2, \quad (\text{B.21})$$

donde $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t$, y del hecho de que la suma del segundo miembro

$$\sum_{i=1}^n (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 t \quad (\text{B.22})$$

en sentido cuadrático medio, como vimos en (A.10). Precisamente, como la convergencia en sentido cuadrático medio es la que se utiliza en la definición de la integral de Ito, tomando el límite en (B.21) se recupera (B.20).

Aunque la integral de Ito no cumple la regla de la cadena del cálculo no estocástico, sí que cumple una cierta regla de la cadena, que se conoce como *fórmula de Ito*.

Supongamos que tenemos un proceso estocástico $Y(t) = y(t, X(t))$, función del proceso estocástico $X(t)$ dado por la integral de Ito

$$X = \int dX = \int g(X(t))dW(t). \quad (\text{B.23})$$

$Y(t)$ representa el proceso estocástico, mientras que y es la forma funcional de Y en función quizás del tiempo explícitamente y de $X(t)$. Por ejemplo, si definimos Y como $Y = W^2$, con $dX = dW$, entonces $y(x)$ representaría la función parabólica $y(x) = x^2$. La definición de la integral de Ito implica que

$$dY(t) = d(W^2) \neq WdW = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=X(t)} dX. \quad (\text{B.24})$$

Para calcular la regla de la cadena correspondiente a la integral de Ito, haremos uso de nuevo de que los incrementos del proceso de Wiener son tales que

$$W(t + \delta) - W(t) \sim \sigma^2 \delta \quad (\text{B.25})$$

lo que nos permitirá calcular de forma simple el límite necesario. Podemos desarrollar la función $Y(X(t))$ mediante Taylor

$$\begin{aligned} Y(t + \delta) - Y(t) &= \frac{\partial y}{\partial t} \delta + \frac{\partial y}{\partial x} (X(t + \delta) - X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (X(t + \delta) - X(t))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} (X(t + \delta) - X(t)) \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

donde, para simplificar la notación hemos obviado el punto de evaluación de las derivadas que es en todas $(t, X(t))$. Por otra parte, para el proceso $X(t)$ según la definición de la integral de Ito tendremos

$$X(t + \delta) - X(t) = g(X(t))(W(t + \delta) - W(t)) \sim g(X(t))\sigma\delta^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.27})$$

y para los incrementos al cuadrado

$$(X(t + \delta) - X(t))^2 = g(X(t))^2 (W(t + \delta) - W(t))^2 \sim g(X(t))^2 \sigma^2 \delta, \quad (\text{B.28})$$

Substituyendo ambas en la expresión (B.26) obtenemos

$$\begin{aligned} Y(t + \delta) - Y(t) &= \frac{\partial y}{\partial t} \delta + \frac{\partial y}{\partial x} (X(t + \delta) - X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} g(X(t))^2 \sigma^2 \delta + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} (X(t + \delta) - X(t)) \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

donde vemos claramente que el primer término y el tercero tienen en realidad el mismo orden en δ por lo que al tomar el límite $\delta \rightarrow 0$ debemos conservar también el tercer término. El segundo sumando da lugar a al término proporcional al incremento del proceso de Wiener de orden más bajo (orden dW) y el resto de sumandos darían lugar a términos de orden superior tanto en dt como dW o combinaciones, por lo que desaparecen en el límite $\delta = dt$ tendiendo a cero, quedando tan solo

$$dY = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x} g(X(t)) dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} g(X(t))^2 \sigma^2 dt \quad (\text{B.30})$$

que se puede utilizar para verificar (B.20). En el caso más general de que el proceso $X(t)$ incluya un término determinista y cumpla la ecuación diferencial estocástica

$$dX = f(X)dt + g(X)dW \quad (\text{B.31})$$

habrá que añadir el término $f dt$ a (B.30) y la fórmula de Ito toma la expresión

$$dY = f(X(t))dt + \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x} g(X(t))dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} g(X(t))^2 \sigma^2 dt \quad (\text{B.32})$$

Debido a que la fórmula se basa en el hecho de que los incrementos del proceso de Wiener tienen valor cuadrático medio proporcional al tiempo, el igual de la fórmula de Ito tiene en realidad un significado de convergencia en valor cuadrático medio cuando dt tiende a cero.

Como alternativa al cálculo diferencial de Ito que difiere del cálculo diferencial ordinario, sería posible interpretar las integrales estocásticas de forma diferente. Si, a diferencia de la interpretación de Ito en la que evaluamos el integrando en el extremo inferior del intervalo de integración, tomamos el punto medio, es decir, en (B.6), hacemos

$$t_i^* = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad (\text{B.33})$$

entonces obtenemos la integral estocástica conocida como integral de Stratonovich. La integral de Stratonovich tiene la ventaja de que cumple la regla de la cadena ordinaria. Por ejemplo, sea la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dX}{dt} = 2W\xi(t) \quad (\text{B.34})$$

en el sentido de Stratonovich, con condición inicial

$$X(0) = 0, \text{ con probabilidad } 1. \quad (\text{B.35})$$

Tomando la ecuación diferencial como forma abreviada de escribir

$$X(t) = \int_0^t 2W(t')dW(t') \quad (\text{B.36})$$

donde la integral es una integral de Stratonovich. Entonces

$$X(t) = W(t)^2 \quad (\text{B.37})$$

es solución de la ecuación diferencial, ya que, la integral de Stratonovich cumple la regla de la cadena habitual y además $W(0) = 0$ con probabilidad 1. De ello deducimos que

$$d(X(t)) = d(W(t)^2) = 2W(t)dW(t). \quad (\text{B.38})$$

A cambio, la integral de Stratonovich pierde la propiedad de independencia respecto de los incrementos del proceso de Wiener, y si definimos el proceso $X(t)$ como

$$X(t) = \int_0^t g(X(t'))dW(t') \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{B.39})$$

ocurre que

$$\langle X(t)dW(t) \rangle \neq 0, \quad (\text{B.40})$$

y en general puede ocurrir que para funciones analíticas a de $X(t)$ tengamos

$$\langle a(X(t))dW(t) \rangle \neq 0. \quad (\text{B.41})$$

Ambas interpretaciones de las ecuaciones diferenciales están relacionadas y en general, si $X(t)$ es solución de

$$dX = fdt + g(X)dW \quad (\text{Ito}), \quad (\text{B.42})$$

es también solución de

$$dX = [f(X) - \frac{\sigma^2}{2}g(X)g'(X)]dt + g(X)dW \quad (\text{Stratonovich}) \quad (\text{B.43})$$

Por último, si $g(X(t)) = 1$, la definición de la integral es independiente del punto t_i^* y por tanto, las integrales de Ito y Stratonovich coinciden, de manera que si $X(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$dX(t) = f(X(t))dt + dW(t) \quad (\text{B.44})$$

interpretada en el sentido de Ito, entonces, $X(t)$ también es solución de la ecuación (B.44) al interpretarla en sentido de Stratonovich. Dado que para $g(X) = 1$ el término del proceso de Wiener aparece directamente sumado en la ecuación diferencial, se lo conoce habitualmente por ruido *aditivo*, en oposición a ruido *multiplicativo* que se aplica cuando la función g es una función no trivial de $X(t)$. A lo largo de la tesis nos ocupamos siempre de ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido aditivo, por lo que podemos interpretarlas en sentido de Ito o Stratonovich según sea más conveniente.

[C]

Ecuación de Fokker-Planck

En este apéndice deduciremos la ecuación de evolución de la densidad de probabilidad $\rho_X(x, t)$ para el proceso estocástico $X(t)$ definido por la ecuación de Langevin

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t)) + g(X(t))\xi(t), \quad (\text{C.1})$$

que tomamos como abreviatura de

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad (\text{C.2})$$

interpretada en el sentido de Ito. Sea entonces una función $a(x)$ analítica en su argumento. Si utilizamos la fórmula de Ito (B.32) para calcular $dA(t)$, donde $A(t) = a(X(t))$, obtenemos

$$dA(t) = A'(X(t))f(X(t))dt + \frac{\sigma^2}{2}A''(X(t))dt + A'(X(t))g(X(t))dW(t). \quad (\text{C.3})$$

Tomando el promedio y teniendo en cuenta la propiedad (B.19) queda

$$\langle dA(t) \rangle = \langle A'(X(t))f(X(t)) \rangle dt + \frac{\sigma^2}{2} \langle A''(X(t)) \rangle dt, \quad (\text{C.4})$$

de donde

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \langle A'(X(t))f(X(t)) \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \langle A''(X(t)) \rangle. \quad (\text{C.5})$$

En función de la densidad de probabilidad $\rho_X(x, t)$, el promedio de un observable $A(X(t))$ se escribe

$$\langle A(X(t)) \rangle = \int A(x) \rho_X(x, t) dx \quad (\text{C.6})$$

y análogamente para los promedios de los observables $A'(X)f(X)$ y $A''(X)g(X)^2$. Como $A(x)$ no depende explícitamente del tiempo, además

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \int A(x) \partial_t \rho_X(x, t) dx. \quad (\text{C.7})$$

Substituyendo los promedios en (C.5) obtenemos

$$\int dx A(x) \partial_t \rho_X(x, t) = \int dx A'(x) f(x) \rho_X(x, t) + \int dx A''(x) g(x)^2 \rho_X(x, t) \quad (\text{C.8})$$

Integrando por partes y suponiendo que $\rho_X(x, t)$ se anula en los extremos de integración queda

$$\int dx A(x) \left\{ \partial_t \rho_X(x, t) + \partial_x [f(x) \rho_X(x, t)] - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 [g(x)^2 \rho_X(x, t)] \right\} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Como esta ecuación a de cumplirse en general para cualquier observable $A(x)$, se deduce que la densidad de probabilidad cumple

$$\partial_t \rho_X(x, t) + \partial_x [f(x) \rho_X(x, t)] - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 [g(x)^2 \rho_X(x, t)] = 0, \quad (\text{C.10})$$

conocida como ecuación de Fokker-Planck.

[D]

Ruido blanco gaussiano

Es habitual en la literatura hablar del término de ruido $\xi(t)$ que aparece en las ecuaciones diferenciales estocásticas basadas en el proceso de Wiener, como un ruido blanco gaussiano, de media nula y covarianza dada por la delta de Dirac

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'). \quad (\text{D.1})$$

En esta sección vamos a ver que el ruido blanco gaussiano es en cierto sentido, la derivada temporal del proceso de Wiener, y que por tanto es razonable tomar $dW = \xi dt$ en las ecuaciones diferenciales estocásticas e interpretarlas de la manera que hemos venido haciendo hasta ahora.

Para ello, comencemos por explicar qué se conoce como ruido blanco gaussiano. El apelativo blanco, nos lleva inevitablemente al dominio de las frecuencias. En efecto, la definición de ruido blanco gaussiano está ligada a una cantidad conocida como la *densidad espectral* $S(\nu)$. La densidad espectral mide la potencia promedio de la frecuencia ν presente en el proceso estocástico $X(t)$. Dada la covarianza del proceso estocástico $X(t)$ como

$$c(t, t') \equiv \langle (X(t) - \langle X(t) \rangle)(X(t') - \langle X(t') \rangle) \rangle, \quad (\text{D.2})$$

si el proceso estocástico es tal que su covarianza es invariante bajo traslaciones temporales, es decir, solo depende de la diferencia $s = t - t'$, entonces la densidad espectral se define como la transformada (inversa) de Fourier de la covarianza:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s) \exp(-2\pi i \nu s) ds. \quad (\text{D.3})$$

A partir de aquí, uno puede pensar en el ruido blanco gaussiano como un proceso estocástico de media nula con densidad espectral constante y positiva $S(\nu) = \sigma^2 > 0$. El nombre de blanco proviene de que la potencia está repartida igualmente por todas las frecuencias, característica que se le supone a la luz blanca.

Según se deduce de (D.3), una densidad espectral constante supone una covarianza $c(s)$ de la forma

$$c(s) = \sigma^2 \delta(s) \quad (\text{D.4})$$

donde $\delta(s)$ es la delta de Dirac, propiedad que habíamos supuesto para el ruido $\xi(t)$.

Con esta definición en función de la densidad espectral, ya podemos concretar en qué sentido el ruido blanco gaussiano es la derivada del proceso de Wiener. En efecto, tomemos el proceso estocástico definido por

$$X^h(t) = \frac{W(t+h) - W(t)}{h}, \quad (\text{D.5})$$

con $h > 0$, $t \geq 0$ y $W(t)$ el proceso de Wiener. Como está definido en función de los incrementos del proceso de Wiener, $X^h(t)$ es un proceso gaussiano de media nula. Además, utilizando la propiedad (v) del proceso de Wiener (apéndice A) que establece que la correlación a tiempos distintos vale

$$\langle W(t)W(t') \rangle = \sigma^2 \min\{t, t'\}, \quad (\text{D.6})$$

es fácil demostrar que la covarianza de X^h es

$$c(t-s) = \frac{\sigma^2}{h} \max\left\{0, 1 - \frac{|t-s|}{h}\right\}. \quad (\text{D.7})$$

A partir de $c(t-s)$ calculamos la densidad espectral, obteniéndose

$$S_h(\nu) = \frac{\sigma^2}{h} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|s|}{h}\right) \cos(2\pi\nu s) ds = \sigma^2 \left(\frac{\sin(2\pi\nu h)}{\pi\nu h}\right)^2 \quad (\text{D.8})$$

Esta densidad espectral es muy ancha para h pequeño y de hecho converge a σ^2 para todo $\nu \neq 0$ cuando h tiende a cero, lo que sugiere que el proceso X^h converge hacia un ruido blanco gaussiano a medida que h converge a cero, y que entonces el ruido blanco gaussiano es la derivada del proceso de Wiener. Como sabemos, el proceso de Wiener es no derivable, por lo que el ruido blanco gaussiano no puede ser un proceso estocástico usual, si no que tiene sentido como una generalización, al igual que la delta de Dirac es una función generalizada. El ruido blanco gaussiano no puede existir físicamente, pero puede aproximarse con la precisión deseada mediante un proceso estocástico convencional con densidad espectral suficientemente ancha.

Por último, podemos calcular el valor que ha de tomar el factor σ^2 para que la solución $X(t)$ de la ecuación de Langevin sin fuerza externa

$$\gamma \frac{dX}{dt} = \xi(t), \quad (\text{D.9})$$

con condición inicial $X(0) = 0$, represente un movimiento browniano en una dimensión. Por una parte, el desplazamiento cuadrático medio se puede expresar en función del coeficiente de difusión de la partícula mediante el análogo unidimensional de la expresión (1.17) resultando

$$\langle X(t)^2 \rangle = 2Dt, \quad (\text{D.10})$$

Por otra, la solución formal de la ecuación de Langevin es

$$\gamma X(t) = \int_0^t \xi(t') dt' \quad (\text{D.11})$$

de donde podemos calcular el desplazamiento cuadrático medio como

$$\begin{aligned} \gamma^2 \langle X(t)^2 \rangle &= \left\langle \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \xi(t') \xi(t'') \right\rangle = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle \\ &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sigma^2 \delta(t' - t'') = \sigma^2 \int_0^t dt' = \sigma^2 t \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Comparando (D.12) con (D.10), se deduce

$$\sigma^2 = 2\gamma^2 D = 2\gamma kT \quad (\text{D.13})$$

o bien,

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\gamma kT \delta(t - t'). \quad (\text{D.14})$$

Adicionalmente, este cálculo nos ha servido para mostrar cómo la interpretación del proceso del ruido blanco gaussiano como un proceso estocástico generalizado cuya función de correlación viene dada por la delta de Dirac, permite calcular ciertas integrales operando formalmente con la distribución delta, sin tener que precisar cual es el significado concreto de la integral estocástica.

Alternativamente, podríamos haber llevado a cabo el cálculo simplemente tomando la ecuación de Langevin (D.9) como una forma abreviada de expresar

$$\gamma dX = dW, \quad (\text{D.15})$$

de donde se deduce que $\gamma X(t)$ es un proceso de Wiener y por tanto, $X(t)$ también aunque con distinta correlación. Si queremos que el proceso de Wiener $X(t) = W(t)/\gamma$ represente un movimiento browniano, ha de tener correlación $2Dt$, y para ello, $W(t)$ ha de tener correlación $2D\gamma^2 t$, de donde se deduce de nuevo que $\sigma^2 = 2D\gamma^2 = 2\gamma kT$.

[E]

Cadenas de Markov

En este apéndice condensamos algunos resultados para la matriz de transición Π de una cadena de Markov que permite asegurar que la solución de

$$\pi^{\text{st}} = \Pi \pi^{\text{st}}, \quad (\text{E.1})$$

es efectivamente la distribución que se alcanza desde cualquier distribución inicial $\pi(0)$ al evolucionar en el tiempo según

$$\pi(t+1) = \Pi \pi(t). \quad (\text{E.2})$$

Recordemos que como Π es una matriz estocástica todas sus componentes valen entre 0 y 1 y la suma de los elementos de cada columna es 1.

Comencemos demostrando que

- i. la matriz Π siempre tiene autovalor 1

Como la matriz es estocástica, sus columnas suman 1, de modo que si I es la matriz identidad, las columnas de la matriz

$$\Pi - 1I, \quad (\text{E.3})$$

suman 0. Entonces, la última fila de la matriz, por ejemplo, es la suma de las demás filas cambiada de signo, y por tanto

$$\det(\Pi - 1I) = 0 \Rightarrow 1 \text{ es autovalor de } \Pi. \quad (\text{E.4})$$

Por otro lado,

- ii. los autovalores λ de Π distintos de 1 cumplen $|\lambda| < 1$.

Si λ es autovalor, significa que existe un vector π tal que

$$\Pi \pi = \lambda \pi, \quad (\text{E.5})$$

que en componentes es una ecuación de tipo

$$\sum_j \Pi_{ij} \pi_j = \lambda \pi_i \quad (\text{E.6})$$

para cada componente i de π . Sumando todas las ecuaciones se obtiene

$$\lambda \sum_i \pi_i = \sum_i \sum_j \Pi_{ij} \pi_j = \sum_j \pi_j \sum_i \Pi_{ij} = \sum_j \pi_j \quad (\text{E.7})$$

ya que al ser Π una matriz estocástica sus columnas suman 1. De modo que si λ es un autovalor diferente de 1, entonces se tiene que cumplir

$$\sum_i \pi_i = 0. \quad (\text{E.8})$$

Por construcción, hemos supuesto que λ es autovalor, por lo que no todos los π_i son nulos, de modo que podemos dividirlos en componentes positivas y negativas.

Si sumamos las ecuaciones (E.6) correspondientes a los $\pi_i \geq 0$ y separamos los sumatorios de las componentes positivas y las negativas, tenemos

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i = \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \geq 0)} \Pi_{ij} \pi_j + \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \leq 0)} \Pi_{ij} \pi_j, \quad (\text{E.9})$$

donde quizá convenga aclarar que $\sum_{(i, \pi_i \geq 0)}$ significa sumatorio sobre los índices i tales que $\pi_i \geq 0$. Como los Π_{ij} son positivos o cero, el segundo sumando es negativo y el primero positivo, de modo que

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i = \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \geq 0)} \Pi_{ij} \pi_j + \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \leq 0)} \Pi_{ij} \pi_j \leq \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \geq 0)} \Pi_{ij} \pi_j \quad (\text{E.10})$$

de donde

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \leq \sum_{(j, \pi_j \geq 0)} \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \Pi_{ij} \pi_j. \quad (\text{E.11})$$

Ahora, como las columnas de Π suman 1, $\sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \Pi_{ij} \leq 1$ y entonces

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \leq \sum_{(j, \pi_j \geq 0)} \pi_j \quad (\text{E.12})$$

de donde

$$\lambda \leq 1. \quad (\text{E.13})$$

Por otra parte, de (E.9), como el primer sumando es positivo y el segundo negativo, también tenemos que

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \geq \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \sum_{(j, \pi_j \leq 0)} \Pi_{ij} \pi_j = \sum_{(j, \pi_j \leq 0)} \sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \Pi_{ij} \pi_j, \quad (\text{E.14})$$

De nuevo $\sum_{(i, \pi_i \geq 0)} \Pi_{ij} \leq 1$, pero en este caso los π_j son negativos, de modo que

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \geq \sum_{j, \pi_j \leq 0} \pi_j \quad (\text{E.15})$$

Como todas las componentes de π suman cero (ver (E.8)) entonces

$$\lambda \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \geq \sum_{j, \pi_j \leq 0} \pi_j = - \sum_{i, \pi_i \geq 0} \pi_i \quad (\text{E.16})$$

y por tanto

$$\lambda \geq -1 \quad (\text{E.17})$$

que junto con $\lambda \leq 1$ y ya que habíamos supuesto que $\lambda \neq 1$, entonces

$$|\lambda| < 1, \quad (\text{E.18})$$

como queríamos demostrar.

La propiedad (i) implica que la ecuación (E.1) tiene siempre al menos una solución. Si la solución es única y la matriz Π es diagonalizable, entonces

- iii. Toda distribución inicial converge a la estacionaria, esto es, $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(0) = \pi^{\text{st}}$, donde π^{st} es la solución de (E.1).

Si la matriz es diagonalizable, sus autovectores forman una base. Podemos expresar $\pi(0)$ en esa base:

$$\pi(0) = c_1 \pi^{\text{st}} + \sum_{\lambda} c_{\lambda} \pi_{\lambda} \quad (\text{E.19})$$

donde π_{λ} son autovectores con autovalor $|\lambda| < 1$ ya que hemos supuesto que el autovalor 1 es no degenerado. Aplicar la ecuación de evolución (E.2) t veces nos da la solución $\pi(t)$ para el tiempo t como

$$\pi(t) = \Pi^t \pi(0), \quad (\text{E.20})$$

que en la base de autovectores es fácilmente calculable:

$$\pi(t) = c_1 \Pi^t \pi^{\text{st}} + \sum_{\lambda} c_{\lambda} \Pi^t \pi_{\lambda} = c_1 \pi^{\text{st}} + \sum_{\lambda} c_{\lambda} \lambda^t \pi_{\lambda} \quad (\text{E.21})$$

En el límite $t \rightarrow \infty$, $\lambda^t \rightarrow 0$ porque los λ son menores que 1 en módulo y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(0) = c_1 \pi^{\text{st}}. \quad (\text{E.22})$$

Si $\pi(0)$ estaba normalizada de forma que $\sum_i \pi_i(0) = 1$, como la matriz Π tiene columnas que suman 1, Π conserva la normalización y $\pi(t)$ ha de estar normalizada también. Si π^{st} esta convenientemente normalizada, entonces c_1 tiene que valer 1 y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(0) = \pi^{\text{st}}. \quad (\text{E.23})$$

- iv. En realidad, según (Behrends, 2004b) basta con que la matriz Π cumpla lo siguiente

$$\sum_i |\Pi_{ij_1} - \Pi_{ij_2}| \leq 2L, \text{ para cualquier } j_1, j_2, \text{ y con algún } L < 1, \quad (\text{E.24})$$

para que la solución π^{st} de la ecuación (E.1) sea realmente única y toda distribución inicial tienda a ella en el límite de $t \rightarrow \infty$. Para matrices 3×3 , el caso que nos interesa, no es complicado demostrar que si cada columna de la matriz tiene al menos dos componentes no nulas, entonces cumple esta condición. En particular, las matrices Π_A y Π_B de los juegos originales tienen en cada columna dos entradas positivas. Por otro lado, el producto de dos matrices con esta característica también tiene al menos 2 entradas no nulas en cada columna, de modo que todos los productos formados con las matrices Π_A y Π_B también lo cumplen. Esto demuestra que todas las combinaciones periódicas de periodo k de los juegos A y B han de tener un π^{st} tal que $\pi(kt)$ tiende a la distribución estacionaria π^{st} para tiempos largos, lo que permite evaluar la ganancia media estacionaria de cualquier combinación periódica de los juegos originales de forma similar a como se hace en la sección 1.3.2 para la secuencia ABB.

[F]

Cálculo de x_k^c

En este apéndice se presenta el pseudo-código del programa utilizado para calcular los x_k^c necesarios para resolver la versión discreta del problema de control de la sección 2.2. Este programa maximiza la función

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k x_k. \quad (\text{F.1})$$

Supongamos que conocemos los valores x_k^c , con $k = 0, 1, \dots, n$. Para calcular el valor x_{n+1}^c , en primer lugar necesitamos un procedimiento para evaluar la función lineal a trozos \hat{J}_n a partir de los valores conocidos x_k^c , $k = 0, 1, \dots, n$. Esto se puede hacer aprovechando la definición recursiva de J_n :

```
procedure pwl(x,h,xc,n)
// xc es un vector cuyas componentes son  $x_n^c$ .
if n=0 //  $\hat{J}_0(x)$  es fácil de calcular
  if x <= 0
    y=0
  else
    y=x
  end
else // Si  $n > 0$ ,  $\hat{J}_n$  se calcula recursivamente en función de las  $\hat{J}_k$  con  $k < n$ 
  if x > xc(n)
    y=x+pwl((1-h)*x,h,xc,n-1)
  else
    y=pwl((1-h)*x+h,xc,n-1)
  end
end
return y
```

Ahora, utilizamos un método numérico de resolución de ecuaciones de tipo $f(x) = 0$ que sólo necesite evaluar la función $f(x)$, como por ejemplo el méto-

do de la bisección. Podemos construir el vector xc con los valores x_n^c de forma recursiva de la siguiente manera:

$$xc(0) = 0 \quad (\text{F.2})$$

$xc(1)$ es la solución de:

$$x + pwl((1 - h) * x, h, xc, 0) - pwl((1 - h) * x + h, h, xc, 0) = 0 \quad (\text{F.3})$$

Una vez obtenidos $xc(0)$ y $xc(1)$, obtenemos $xc(2)$ como solución de:

$$x + pwl((1 - h) * x, h, xc, 1) - pwl((1 - h) * x + h, h, xc, 1) = 0 \quad (\text{F.4})$$

etc.

[G]

Obtención del periodo óptimo

Mediante simulaciones numéricas de la flashing ratchet con encendido y apagado periódico, podemos calcular la corriente media producida para un periodo τ cualquiera. Barriendo valores de τ podemos obtener el periodo que produce el máximo flujo, al que llamaremos periodo óptimo. Podemos reducir drásticamente el esfuerzo computacional necesario para encontrar el valor óptimo de τ si conocemos previamente una estimación de su valor, lo que no resulta difícil teniendo en cuenta el mecanismo que hace funcionar la flashing ratchet. Como vimos en la introducción, el efecto ratchet se produce básicamente en dos pasos. Primero, las partículas se difunden con el potencial apagado. Partiendo desde la posición del mínimo de potencial, han de recorrer aproximadamente la distancia que la separa de la posición del siguiente máximo del potencial, de modo que cuando el potencial se conecte de nuevo algunas puedan ser arrastradas hasta el siguiente mínimo. Si el tiempo de apagado es muy corto, las partículas no llegan a la posición del máximo y si es demasiado largo podrían llegar a cruzar el máximo anterior a través del tramo largo. Por tanto, el mayor flujo se obtendrá con un tiempo de apagado del orden del tiempo que se tarda en alcanzar por difusión el siguiente máximo del potencial desde la posición del mínimo, es decir, el tiempo que se tarda en recorrer aL en un movimiento difusivo. En la difusión, la distancia recorrida es del orden de:

$$x(t) \sim \sqrt{2Dt} \quad (\text{G.1})$$

de modo que el tiempo de apagado ha de ser de orden

$$aL \sim \sqrt{2Dt_{\text{off}}} \Rightarrow t_{\text{off}} \sim \frac{(aL)^2}{2D} \quad (\text{G.2})$$

Para el potencial de diente de sierra con $a = 1/3$, $L = 1$ y partículas cuyo coeficiente de difusión vale $D = 1$, el tiempo de apagado óptimo ha de valer aproximadamente

$$t_{\text{off}} \sim \frac{1}{9 \times 2} = \frac{1}{18} \approx 0.056 \quad (\text{G.3})$$

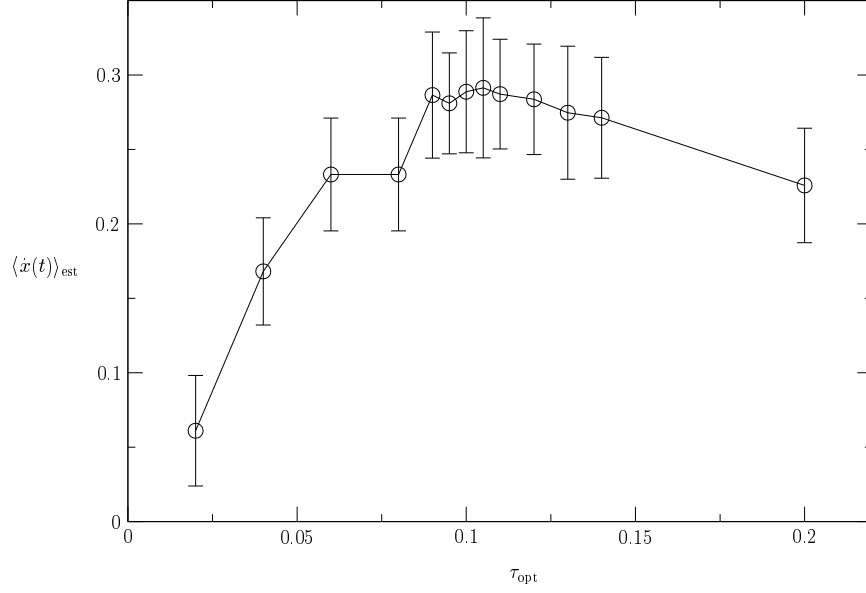


Figura G.1: Velocidad media en estado estacionario en función del periodo de encendido y apagado, para el potencial de dientes de sierra de parámetros $V_0 = 5kT$, $L = 1$ y $a = 1/3$. Cada simulación se ha promediado sobre 100 realizaciones de 10^7 pasos temporales. El error de las medidas se ha estimado como la desviación estándar de las 100 realizaciones. El paso temporal en todas ellas es $\Delta t = 0.0001$

Por otra parte, en el tiempo en el que el potencial permanece encendido, las partículas han de ser arrastradas desde el máximo hasta el mínimo del potencial. Un tiempo de encendido demasiado corto impedirá el arrastre, y uno demasiado largo también repercutirá en un menor flujo ya que las partículas una vez llegan cerca del mínimo no progresan más hasta un nuevo ciclo de desconexión y conexión. Por tanto, el tiempo óptimo de conexión será del orden del tiempo necesario para recorrer la distancia entre un máximo y el mínimo siguiente a su derecha, cuya distancia es $(1 - a)L$, debido al arrastre producido por el potencial. Durante el periodo de encendido, en promedio se cumple que

$$\gamma \dot{x} = F \quad (\text{G.4})$$

ya que las partículas son partículas brownianas sobrearmortiguadas. F es la fuerza debida al potencial, por lo que en el tramo largo del potencial la velocidad de la partícula será

$$\dot{x} \sim \frac{V_0}{(1 - a)L}, \quad (\text{G.5})$$

y el tiempo para recorrer la distancia $(1 - a)L$ a esa velocidad será del orden de

$$t_{\text{on}} \sim \frac{(1 - a)^2 L^2}{V_0} = \frac{4}{9 \times 5} \approx 0.089. \quad (\text{G.6})$$

Finalmente, el periodo óptimo τ será del orden de la suma de ambos tiempos:

$$\tau_{\text{opt}} \sim t_{\text{on}} + t_{\text{off}} \approx 0.15 \quad (\text{G.7})$$

Una vez obtenido el orden de magnitud del periodo óptimo, procedemos a realizar simulaciones para periodos de ese orden y obteniendo la velocidad promedio de la partícula. Los resultados se muestran en la figura G.1. Cada valor ha sido obtenido mediante un promedio a 100 realizaciones de 10^7 pasos temporales (del orden de 2×10^5 periodos). El error de la medida se ha tomado como la desviación estándar de las 100 realizaciones. El periodo correspondiente a la velocidad promedio máxima resultante de las simulaciones es

$$\tau_{\text{opt}} = 0.105 \quad (\text{G.8})$$

en unidades tales que $L = 1$, $\gamma = 1$ y $kT = 1$, siendo la velocidad estacionaria máxima

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_{\text{est}} = 0.291 \pm 0.047 \quad (\text{G.9})$$

en las mismas unidades.

En el caso de permitir tiempos de encendido diferentes a los tiempos de apagado, el procedimiento de maximización es similar, excepto que se han de realizar simulaciones barriendo una malla bidimensional, por lo que el procedimiento resulta algo más costoso en tiempo de computación.

Publicaciones derivadas de la tesis

Los resultados de esta tesis han sido publicados en las siguientes referencias, exceptuando algunas correspondientes a los capítulos 2, 3 y 4 que se encuentran en preparación:

- Capítulo 2:
 - “Optimal strategies in collective Parrondo games”, L. Dinis y J.M.R. Parrondo. *Europhys. Lett.*, **63**, (2003) 319
 - “Inefficiency of voting in Parrondo games”, L. Dinis y J.M.R. Parrondo. *Physica A*, **343**, (2004) 701
 - “Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games”, J.M.R. Parrondo y L. Dinis. *Contemp. Phys.*, **45**, (2004) 147
 - “Paradoxical games, ratchets, and related phenomena”, J.M.R. Parrondo, L. Dinis, J. Buceta, y K. Lindenberg. En *Advances in Condensed Matter and Statistical Mechanics*, E. Korutcheva y R. Cuerno (editores). Nova Science Publishers (2004)
 - “Collective decision making and paradoxical games: from democracy to dictatorship”. L. Dinis, B. Sotillos, E. García-Toraño, y J.M.R. Parrondo. En preparación
- Capítulos 3 y 4
 - “The best sequence and the best strategy for Parrondo games”, L. Dinis. En preparación
- Capítulo 5
 - “Feedback control in a collective flashing ratchet”, F.J. Cao, L. Dinis y J.M.R. Parrondo. *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 040603
 - “Closed-loop control strategy with improved current for a flashing ratchet”, L. Dinis, J.M.R. Parrondo y F.J. Cao. *Europhys. Lett.*, **71** (2005) 536
 - “Control and rectification in collective stochastic systems”, J.M.R. Parrondo y L. Dinis. *AIP Conf. Proc.*, **780** (2005) 15

Referencias

- Ajdari, A. y Prost, J. (1993), Drift induced by a periodic potential of low symmetry: pulsed dielectrophoresis, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Paris, Série II* **315**, 1635
- Andresen, B., Salamon, P., y Berry, R. S. (1984), Thermodynamics in finite time, *Physics Today* **37(9)**, 62–70
- Astumian, R. D. y Bier, M. (1994), Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors, *Physical Review Letters* **72(11)**, 1766–1769
- Astumian, R. D. y Bier, M. (1996), Mechanochemical coupling of the motion of molecular motors to ATP hydrolysis, *Biophysical journal* **70**, 637
- Axelrod, R. (1980)a, Effective Choices in the Prisoner's Dilemma, *Journal of Conflict Resolution* **24**, 3
- Axelrod, R. (1980)b, More Effective Choices in the Prisoner's Dilemma., *Journal of Conflict Resolution* **24**, 379
- Axelrod, R. (1984), *The Evolution of Cooperation*, BASIC Books, New York
- Baierlein, R. (2001), The elusive chemical potential, *American Journal of Physics* **69**, 423
- Barkai, E., Hansel, D., y Sompolinsky, H. (1992), Broken symmetries in multi-layered perceptrons, *Physical Review A* **45**, 4146
- Behrends, E. (2004)a, The mathematical background of Parrondo's paradox, en *Proc. SPIE Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics II*, Vol. 5471, p. 510
- Behrends, E. (2004?)b, *Parrondo's paradox: a priori and adaptive strategies*, <http://page.mi.fu-berlin.de/~behrends/prepr.htm>
- Braess, D. (1969), Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung, *Unternehmensforschung* **12**, 258
- Brown, R. (1828), A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Magazine* **4**, 161
- Cao, F., Dinis, L., y Parrondo, J. M. R. (2004), Feedback control in a collective flashing ratchet, *Physical Review Letters* **93**, 040603
- Challet, D. (2005), <http://unifr.ch/econophysics/minority>
- Challet, D. y Zhang, Y. (1997), Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game, *Physica A* **246**, 407

- Cleuren, B. y Van den Broeck, C. (2004), Parrondo Games with Strategy, en *Proceedings of SPIE*, Bellingham, Vol. 5471, p. 109
- Colman, A. (1995), *Game Theory and Its Applications: In the Social and Biological Sciences*, Routledge
- Curzon, F. L. y Ahlborn, B. (1975), Efficiency of a Carnot engine at maximum power output, *American Journal of Physics* **43**, 22–24
- Dinis, L. y Parrondo, J. M. R. (2003), Optimal strategies in collective Parrondo games, *Europhysics Letters* **63**, 319
- Dinis, L. y Parrondo, J. M. R. (2004), Inefficiency of voting in Parrondo games, *Physica A* **343**, 701
- Dinis, L., Parrondo, J. M. R., y Cao, F. (2005)a, Closed-loop control strategy with improved current for a flashing ratchet, *Europhysics Letters* **71**, 536
- Dinis, L., Sotillos, B., García-Toraño, E., y Parrondo, J. M. R. (2005)b, *Collective decision making and paradoxical games: from democracy to dictatorship*, En preparación
- Dugatkin, L. y Reeve, H. (eds.) (2000), *Game theory and animal behavior*, Oxford University Press
- Einstein, A. (1906), Zur Theorie der Brownschen Bewegung, *Annalen der Physik* **19**, 317, Versión inglesa en (Einstein, 1956)
- Einstein, A. (1956), *Investigations on the theory of Brownian movement*, Dover, New York
- Feynman, R., Leighton, R., y Sands, M. (1963), *The Feynman Lectures on physics*, Addison Wesley, Reading, MA
- Galam, S. (2003), Modelling rumors: the no plane Pentagon French hoax case, *Physica A* **320**, 571
- Harmer, G. y Abbott, D. (1999)a, Losing strategies can win by Parrondo's Paradox, *Nature* **402**, 864
- Harmer, G. y Abbott, D. (1999)b, Parrondo's Paradox, *Statistical Science* **14**, 206
- Jiménez de Cisneros, B., Reimann, P., y Parrondo, J. M. R. (2003), Non-cooperative Brownian donkeys: A solvable 1D model, *Europhysics Letters* **64**, 599
- Jülicher, F., Ajdari, A., y Prost, J. (1997), Modeling molecular motors, *Reviews of Modern Physics* **69**, 1269
- Kaprivski, P. y Redner, S. (2003), Dynamics of Majority Rule in Two-State Interacting Spin Systems, *Physical Review Letters* **90**, 238701
- Keizer, J. (1987), *Statistical thermodynamics of nonequilibrium processes*, Springer-Verlag, New York
- Kitano, H. (2001), *Foundations of systems biology*, MIT Press, Cambridge
- Kloeden, P. y Platen, E. (1992), *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer-Verlag, Berlin
- Layton, J. M. (1976), *Multivariable Control Theory*, Peter Peregrinus
- Levinson, D. (2005), Micro-foundations of congestion and pricing: A game theory perspective, *Transportation Research Part A* **39**, 691
- Lewis, F. L. y Syrmos, V. L. (1995), *Optimal Control*, Wiley
- Linke, H. (2002), Ratchets and Brownian motors: basics, experiments and ap-

- plications, *Applied Physics A* **75**, 167
- Linke, H. (2005), Comunicación privada
- Magnasco, M. (1993), Forced thermal ratchets, *Physical Review Letters* **71**, 1477
- Magnasco, M. (1994), Molecular combustion motors, *Physical Review Letters* **72**, 2656
- Marquet, C., Buguin, A., T. L., y Silberzan, P. (2002), Rectified Motion of Colloids in Asymmetrically Structured Channels, *Physical Review Letters* **88**, 168301
- Parrondo, J. M. R. (1996), *How to cheat a bad mathematician*, Sin publicar, <http://seneca.fis.ucm.es/parr/GAMES/cheat.pdf>
- Parrondo, J. M. R. (2005), Fluctuaciones brownianas y atomicidad, *Revista Española de Física* **19**, 19
- Parrondo, J. M. R. y Dinis, L. (2004), Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games, *Contemporary Physics* **45**, 147
- Parrondo, J. M. R., Dinis, L., Buceta, J., y Lindenberg, K. (2004), Paradoxical games, ratchets, and related phenomena, en E. Korutcheva y R. Cuerno (eds.), *Advances in Condensed Matter and Statistical Mechanics*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, Berlin
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G., y Abbott, D. (2000)a, New paradoxical games based on Brownian ratchets, *Physical Review Letters* **85**, 5226
- Parrondo, J. M. R. y Jiménez de Cisneros, B. (2000), Juegos Paradójicos y máquinas térmicas brownianas, *Revista Española de Física* **14**, 24
- Parrondo, J. M. R. y Jiménez de Cisneros, B. (2002), Energetics of Brownian motors: a review, *Applied Physics A* **75**, 179
- Parrondo, J. M. R., Jiménez de Cisneros, B., y Brito, R. (2000)b, Thermodynamics of Isothermal Brownian Motors, en J. Freund y T. Poschel (eds.), *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology*, p. 38, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, Berlin
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. (1992), *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press
- Prost, J., Chauwin, J.-F., Peliti, L., y Ajdari, A. (1994), Asymmetric pumping of particles, *Physical Review Letters* **72**, 2652
- Reimann, P. (2002), Brownian motors: noisy transport far from equilibrium, *Physics Reports* **361**, 57
- Rousselet, J., Salome, L., A. A., y Prost, J. (1994), Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential, *Nature* **370**, 446
- Savel'ev, S., Marchesoni, F., Hänggi, y Nori, F. (2004), Nonlinear signal mixing in a ratchet device, *Europhysics Letters* **67**, 179
- Savel'ev, S., Marchesoni, F., y Nori, F. (2003), Controlling Transport in Mixtures of Interacting Particles using Brownian Motors, *Physical Review Letters* **91**, 010601
- Siwy, Z. (2002), Fabrication of a Synthetic Nanopore Ion Pump, *Physical Review Letters* **89**, 198103
- Smoluchowski, M. v. (1912), Experimentell nachweisbare, der üblichen Ther-

- modynamik widerprechende Molekularphänomene, *Physik. Zeitschr.* **13**, 1069
- Tarlie, M. y Astumian, R. (1998), Optimal modulation of a Brownian ratchet and enhanced sensitivity to a weak external force, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* **95**, 2039
- Taylor, H. M. y Karlin, S. (1984), *An introduction to stochastic modeling*, Academic Press, Inc.
- Toral, R. (2001), Cooperative Parrondo's games, *Fluctuations and Noise Letters* **1**, L7
- Toral, R. (2002), Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox, *Fluctuations and Noise Letters* **2**, L305
- Toral, R., Amengual, P., y Mangioni, S. (2003), Parrondo's games as a discrete ratchet, *Physica A* **327**, 105
- Touchette, H. y Lloyd, S. (2000), Information-Theoretic Limits of Control, *Physical Review Letters* **84**, 1156
- Tsong, T. y Astumian, R. (1996), Absorption and conversion of electric field energy by membrane bound ATPase, *Bioelectrochemistry and Bioenergetics* **70**, 637
- Van den Broeck, C. y Parrondo, J. M. R. (1993), Generalization Error in a Self-Similar Committee Machine, *Physical Review Letters* **71**, 2355
- Vellerman, D. y Wagon, S. (2000), Parrondo's Paradox, *Mathematica in Education and Research* **9**, 85
- Villegas, J., Savel'ev, S., Nori, F., G. E. A. J. G. R., y Vicent, J. (2003), Reversible Rectifier that Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta in Superconductors, *Science* **302**, 1188
- Von Neumann, J. y Morgensten, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press
- Westerhoff, H., Tsong, T., Chock, P., Chen, Y., y Astumian, R. (1986), How enzymes can capture and transmit free energy from an oscillating electric field, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* **83**, 4734
- Wiener, N. (1921), The average of an analytic functional and the Brownian Movement, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A* **7**, 253